

Απειροστικός Λογισμός Ι – Πρόοδος
23 Νοεμβρίου 2024

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

Θέμα 1. Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν το supremum του A δεν ανήκει στο A , τότε υπάρχει γνησιώς αύξουσα ακολουθία (a_n) στοιχείων του A η οποία συγκλίνει στο supremum του A .

Θέμα 2. Έστω A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\sup(A \cup B) = \max \{ \sup(A), \sup(B) \}.$$

Θέμα 3. Να βρεθούν τα $\sup$, $\inf$, $\max$ και $\min$ (αν υπάρχουν) των συνόλων

$$A = \left\{ \frac{1}{n+m} : n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}.$$

Θέμα 4. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$\alpha_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \beta_n = \cos(n) \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2} \right)^n, \quad \gamma_n = \left(1 + \frac{1}{4n} \right)^n,$$

$$\delta_n = \frac{1}{n^3} + \frac{\sqrt{2}}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{\sqrt{n+1}}{(2n)^3}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!