ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ, ΑΘΗΝΑ 15784
ΤΗΛ 210 - 7276397, FAX 210 - 7276398

1 Οκτωβρίου 2012

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Κωδικός Μαθήματος: 101 (Υ)

Έτος διδασκαλίας: 2012-2013, Χειμερινό Εξάμηνο
Ημέρες διδασκαλίας: Δευτ. - Τετ. - Παρ. , 11:00-13:00

Διδάσκοντες

- **Τμήμα 1°** (ΑΜ που λήγει σε 0,1,2) Αμφ 21,
  Βασίλειος Νεστορίδης,
  Γραφείο: 307, τηλ. 210-7276304,
  e-mail: vnestor@math.uoa.gr
- **Τμήμα 2°** (ΑΜ που λήγει σε 3,4,5,6) Αμφ 23,
  Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα,
  Γραφείο: 207, τηλ. 210-7276375,
  e-mail: ldalla@math.uoa.gr
- **Τμήμα 3°** (ΑΜ που λήγει σε 7,8,9) Αμφ 24,
  Μαρία Παπατριανταφύλλου,
  Γραφείο: 201, τηλ. 210-7276349,
  e-mail: mpapatr@math.uoa.gr

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Ιστοσελίδα Μαθήματος:

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH130/

Περιγραφή Μαθήματος:

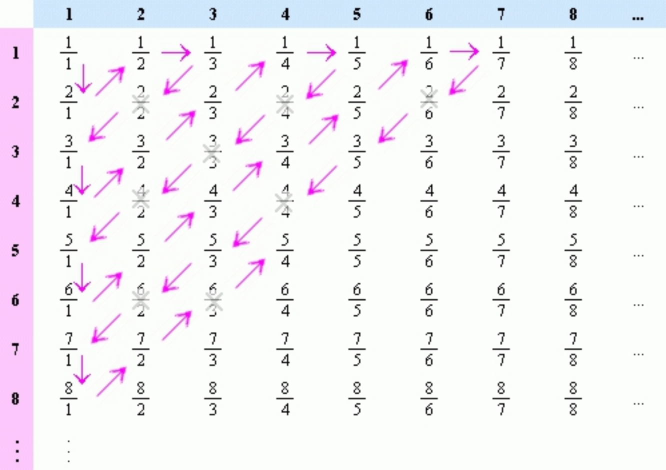
1. Πραγματικοί αριθμοί
2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών
3. Συναρτήσεις
4. Συνέχεια και όριο συναρτήσεων
5. Παράγωγος

1. **Πραγματικοί αριθμοί**:

- Αξιωματική θεμελίωση των Πραγματικών αριθμών
- Φυσικοί, Ακέραιοι και Ρητοί αριθμοί
- Αξίωμα πληρότητας
- Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας
- Άρρητοι αριθμοί
- Ακέραιο μέρος
- Πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς
- Κλασσικές ανισότητες

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Ρητοί αριθμοί

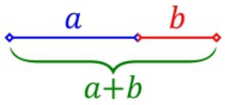
Η διαγώνια μέθοδος του Cantor και η « 1- 1 » αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς



Το σοκ του Πυθαγόρα: Υποτείνουσα ορθογωνίων τριγώνων

Χρυσή τομή: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots$

- Γεωμετρικά προκύπτει μέσω της αναλογίας: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \phi$

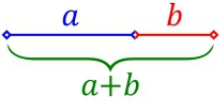


- Αλγεβρικά προκύπτει ως θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Χρυσή τομή: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$

- Γεωμετρικά προκύπτει μέσω της αναλογίας: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \phi$



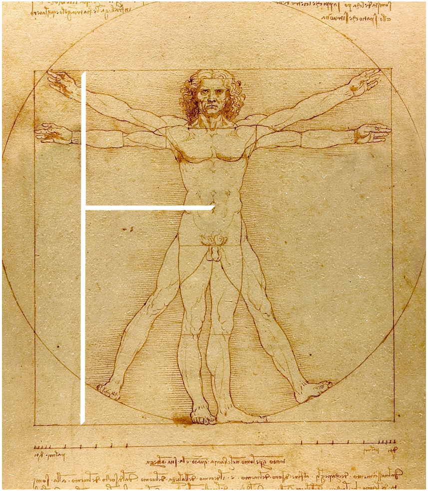
- Αλγεβρικά προκύπτει ως θετική ρίζα της εξίσωσης:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Τι εκφράζει πραγματικά αυτός ο αριθμός;

Αρμονία στην αρχιτεκτονική του Παρθενώνα, 438 π.Χ.

Αρμονία στο έργο του Da Vinci - Vitruvian Man, 1487 μ.Χ.



ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Άρρητοι αριθμοί

ρ = 1

ν = 3

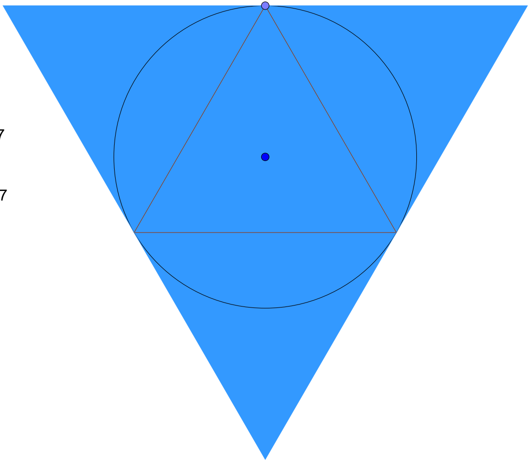
Εξωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εξωτερικού πολυγώνου: 5.1961524227

Εσωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εσωτερικού πολυγώνου: 1.2990381057

Διαφορά εμβαδών: 3.897114317



ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Άρρητοι αριθμοί

ρ = 1

ν = 4

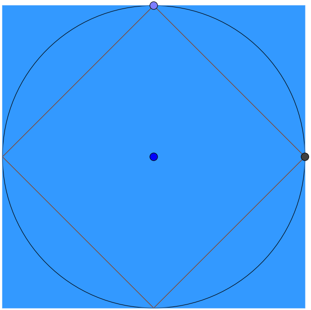
Εξωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εξωτερικού πολυγώνου: 4

Εσωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εσωτερικού πολυγώνου: 2

Διαφορά εμβαδών: 2



ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Άρρητοι αριθμοί

ρ = 1

ν = 5

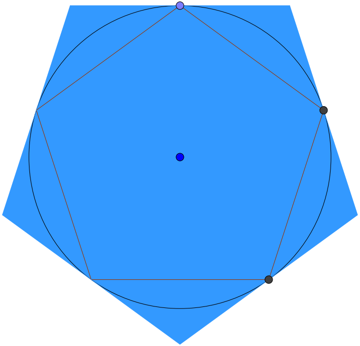
Εξωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εξωτερικού πολυγώνου: 3.63271264

Εσωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εσωτερικού πολυγώνου: 2.3776412907

Διαφορά εμβαδών: 1.2550713493



ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Άρρητοι αριθμοί

ρ = 1

ν = 10

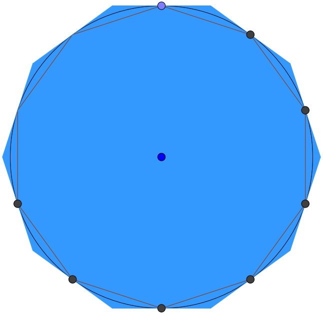
Εξωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εξωτερικού πολυγώνου: 3.2491969623

Εσωτερικό Πολύγωνο

Εμβαδόν εσωτερικού πολυγώνου: 2.9389262615

Διαφορά εμβαδών: 0.3102707009



Υπερβατικοί αριθμοί - Ρητή προσέγγιση του π με 999 δεκαδικά ψηφία

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781
640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058
822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819
6442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346
034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092
0962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941
511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379
962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021
3949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184
676694051320005681271452635608277857713427577896091736371787214684
409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608
640344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597317
328160963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710
100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687
311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111
959092164201989

2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών:

- Συγκλίνουσες ακολουθίες
- Μονότονες ακολουθίες
- Κιβωτισμός διαστημάτων
- Αναδρομικές ακολουθίες

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;

Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

- Μέσω τύπου:
  1. $\alpha_n = \sqrt[n]{n}, \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  2. $\alpha_n = (1+1/n)^n, \ \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e = 2,71828...$
- Μέσω αναδρομικής σχέσης:
  1. $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}, \ n \geq 1, \ \alpha_1 = 1, \ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \phi.$
  2. Ακολουθία Fibonacci: $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}, \ \alpha_0 = 0, \ \alpha_1 = 1,$ $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \phi.$
- Ακολουθία των πρώτων αριθμών:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

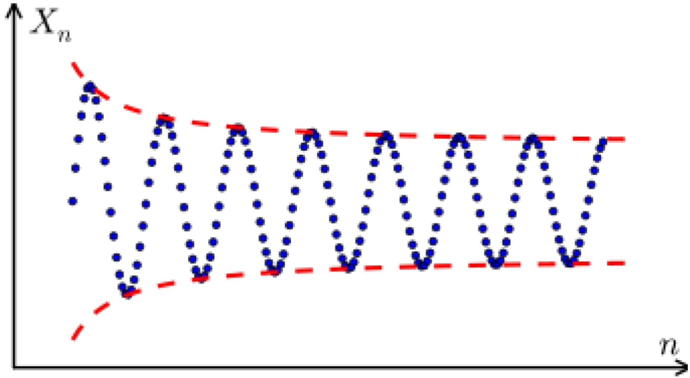
Τι είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;
Είναι μια απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

- Μέσω τύπου:
  1. $\alpha_n = \sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  2. $\alpha_n = (1+1/n)^n$, $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e = 2,71828...$
- Μέσω αναδρομικής σχέσης:
  1. $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}$, $n \geq 1$, $\alpha_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \phi$.
  2. Ακολουθία Fibonacci: $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \phi$.
- Ακολουθία των πρώτων αριθμών:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Υπάρχει συνάρτηση ή αναδρομικός τύπος που να δίνει την παραπάνω ακολουθία;

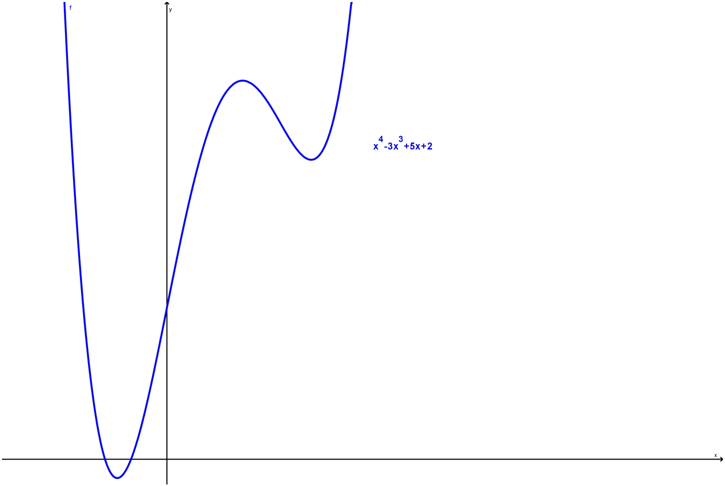
Φραγμένη - μη συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών απείρων όρων



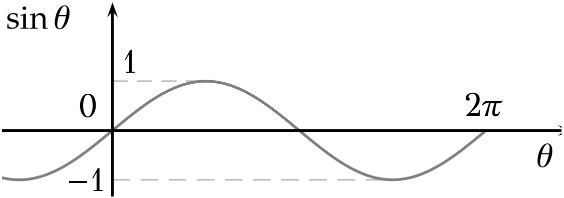
3. Συναρτήσεις:

- Βασικοί ορισμοί
- Αλγεβρικές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Εκθετική συνάρτηση

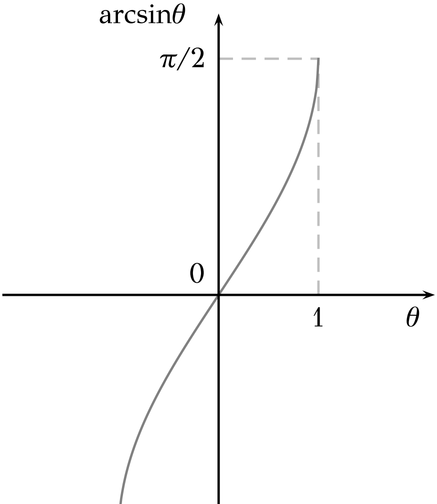
Γράφημα πολυωνυμικής συνάρτησης $4^{ου}$ βαθμού



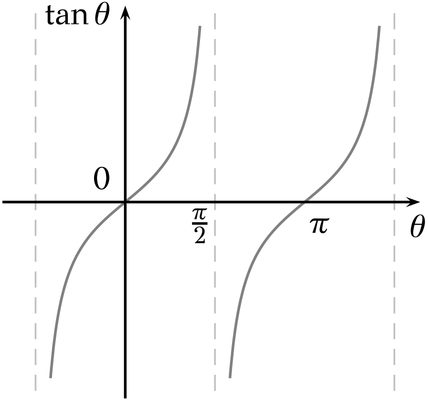
Γράφημα τριγωνομετρικής συνάρτησης ημιτόνου



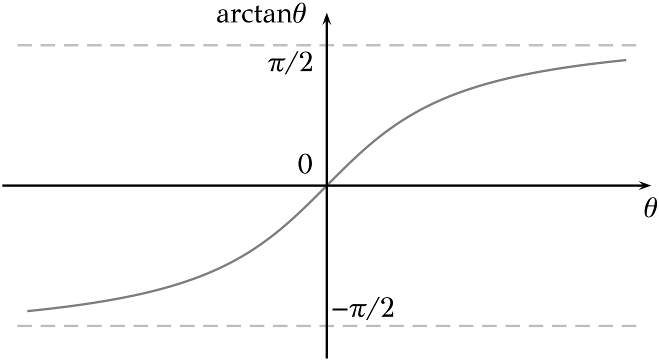
Γράφημα αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης ημιτόνου



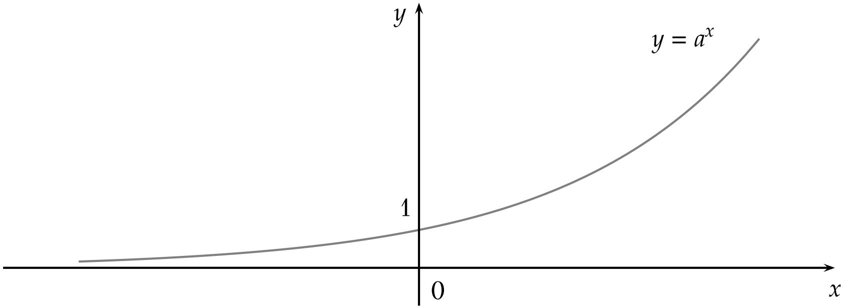
Γράφημα τριγωνομετρικής συνάρτησης εφαπτομένης



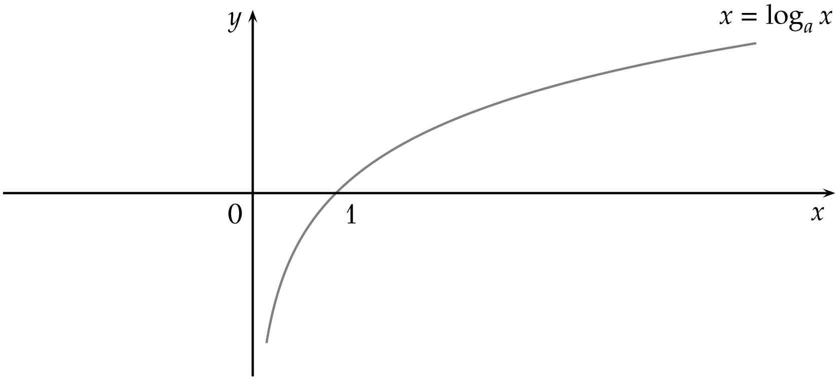
Γράφημα αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης εφαπτομένης



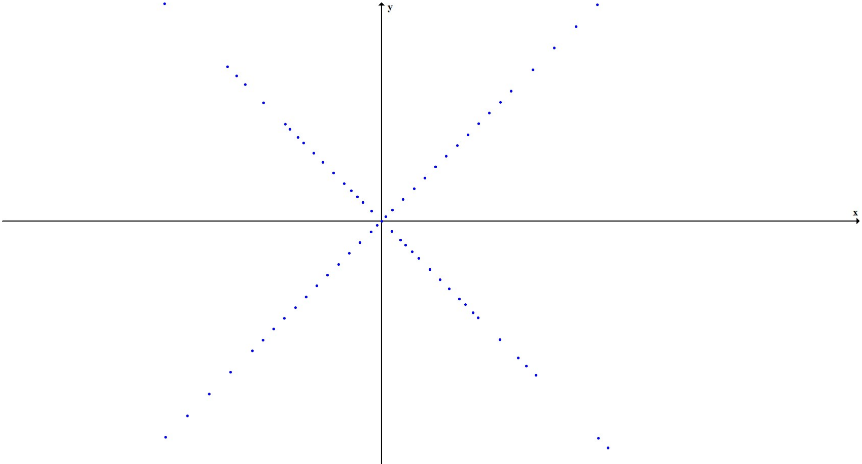
Γράφημα εκθετικής συνάρτησης για $\alpha > 1$



Γράφημα λογαριθμικής συνάρτησης για $\alpha > 1$



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{για } x \in \mathbf{Q} \\ -x, & \text{για } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$



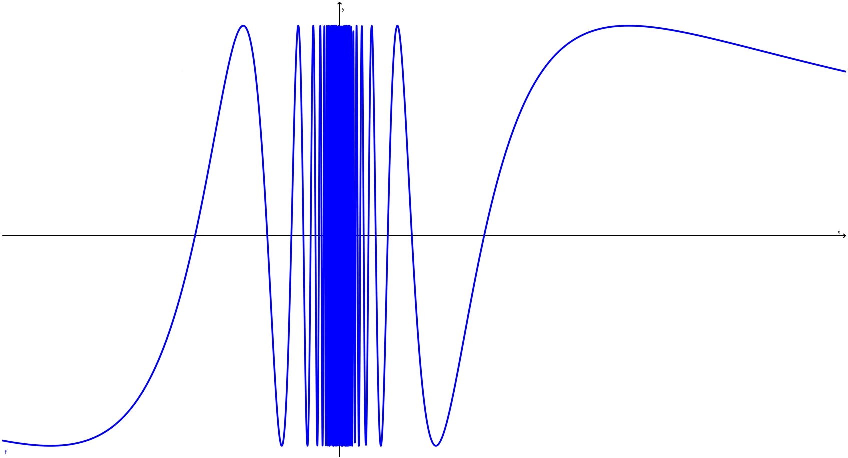
4. Όριο και Συνέχεια Συναρτήσεων:

- Η έννοια του ορίου συνάρτησης - Συνέχεια.
- Αρχή της μεταφοράς
- Συνέχεια γνωστών συναρτήσεων
- Συνέχεια και τοπική συμπεριφορά
- Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής
- Ύπαρξη μεγίστης και ελαχίστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστά διαστήματα - Μονότονες συναρτήσεις
- Συνεχείς και «1-1» συναρτήσεις
- Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Λογαριθμική συνάρτηση

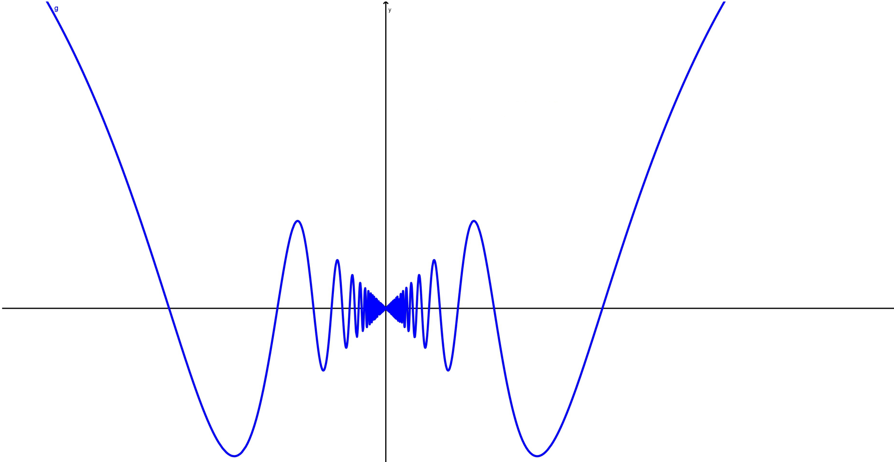
5. Παράγωγος:

- Εισαγωγή: Παραδείγματα από τη Γεωμετρία και τη Φυσική.
- Η έννοια της παραγώγου
- Κανόνες παραγώγισης
- Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων
- Θεώρημα μέσης τιμής
- Θεώρημα Darboux
- Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης
- Κριτήρια τοπικών ακροτάτων
- Γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής
- Κανόνες De L'Hospital
- Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις - Σημεία καμπής
- Μελέτη συναρτήσεων

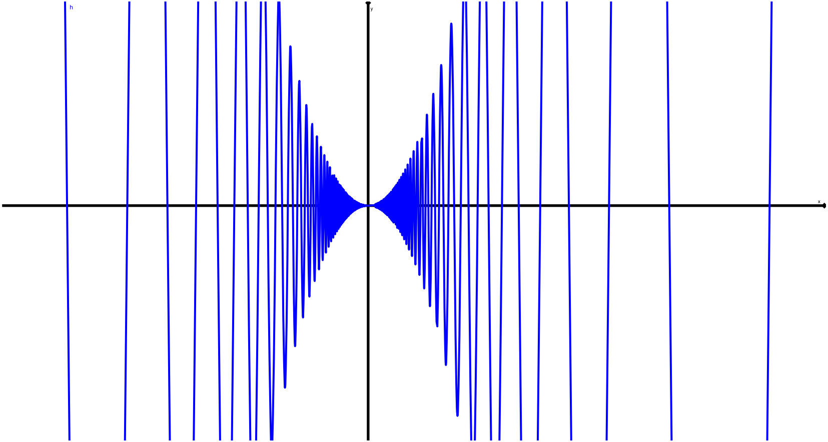
Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$



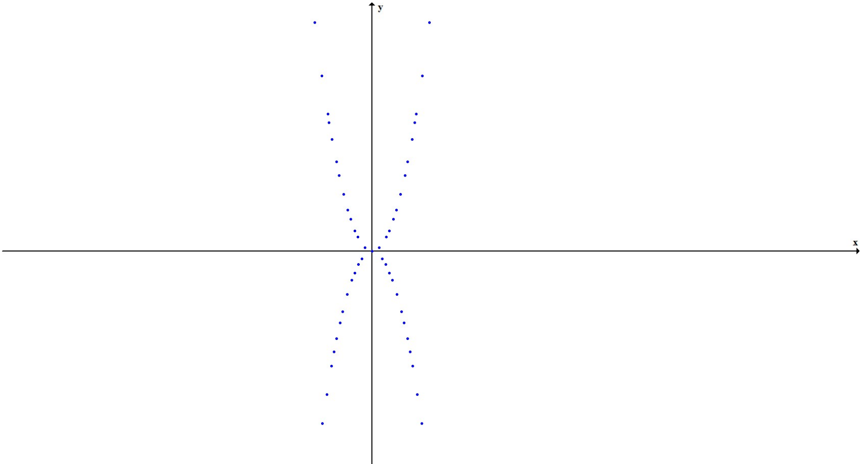
Η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$



Η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^2 sin(1/x), & x \neq 0 \\ \quad 0 \quad\quad , & x = 0 \end{cases}$



Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{για } x \in \mathbf{Q} \\ -x^2, & \text{για } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$



Βιβλιογραφία

- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας: « Απειροστικός Λογισμός Ι », Εκδόσεις Συμμετρία.
- Λ. Τσίτσας: « Εφαρμοσμένος Απειροστικός Λογισμός », Εκδόσεις Συμμετρία.
- M. Spivak: “ Calculus ”, Benjamin (κυκλοφορεί σε Ελληνική μετάφραση με τίτλο: « Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός », Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.)
- R. Courant and F. John: “ Introduction to Calculus and Analysis ”, Vol. I, Interscience.
- G. H. Hardy: “ A Course in Pure Mathematics”, Cambridge University Press.
- S. Salas and E. Hille: “ Calculus ”, John Wiley.
- R. Bartle and D. Sherbert: “ Introduction to Real Analysis ”, John Wiley.

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
University of Athens
Department of Mathematics