Μάθημα 8ο: 26/10/2012

Απερροσιμως εφαρμογές της Μαθηματικής Επαγωγής
(Μαθηματική ανάλυση, Θεωρία Αριθμών/Άλγεβρα)

<u>Πρόταση</u>: Αρχή Ελαχίστου ή της καλής διάταξης

Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq N$. Τότε υπάρχει $s_0 \in A$: $s_0 \leq a$ για κάθε $a \in A$, δηλ κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι $\exists\, A \neq \emptyset$ και $A \subseteq N$ που <u>δεν</u> έχει ελάχιστο στοιχείο

$B = \{\nu \in N : 0, 1 \ldots n \notin A\} \subseteq N$ Θα αποδείξουμε ότι Β επαγωγικό

Πράγματι: $0 \in B$ (αν το $0 \in A$ τότε θα έπρεπε $0 \leq a$ $\forall a \in A \subseteq N$ δηλ το Α θα είχε ελάχιστο στοιχείο το 0)

Έστω $\nu \in B$. Τότε $0, 1 \ldots \nu \notin A$. Τότε και το $\nu+1 \notin A$ (αν το $\nu+1 \in A$ τότε $\nu+1 \leq a$ $\forall a \in A$, δηλ το $(\nu+1)$ θα ήταν ελάχιστο. Άτοπο γτ το Α δεν έχει ελάχιστο)

Άρα $0, 1, 2 \ldots \nu, \nu+1 \notin A$ δηλ $\nu+1 \in B$
Άρα το Β επαγωγικό

Από τη Μαθηματική Επαγωγή $B = N$
δηλ για κάθε $n \in N \Rightarrow n \in B \Rightarrow n \notin A$ Άρα $A = \emptyset$ <u>Άτοπο</u>

Άσκηση - Πρόταση (Εφαρμ. στη Μαθημ. Ανάλυση)

Δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1, n_2, \dots n_\nu \dots$
με $n_1 > n_2 > n_3 \dots > n_\nu > n_{\nu+1} > \dots$

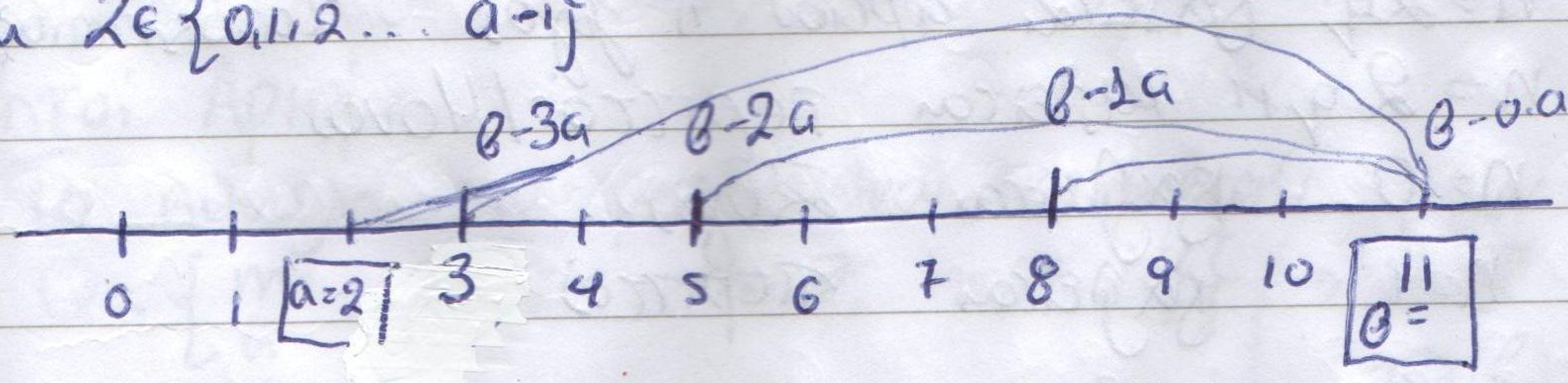
δηλ. δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνήσια φθίνουσα
Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν $n_1 > n_2 > \dots n_\nu > n_{\nu+1} > \dots$

$A = \{n_1, n_2 \dots\} \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$
Από Αρχή Ελαχίστου,
θα $\exists$ n_{k_0} = ελάχιστο στοιχείο του A δηλ. $n_{k_0} \le n_\nu$ $\nu = 1, 2 \dots$
Θα ισχύει λοιπόν ότι $n_{k_0} \le n_{k_0+1}$. Όμως $n_{k_0+1} < n_{k_0}$ διότι φθίνουσα

Δηλαδή $n_{k_0} \le n_{k_0+1} < n_{k_0}$ Άτοπο

Άσκηση/Πρόταση: Ευκλείδιος Αλγόριθμος της Διαίρεσης.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$, $b > a \ge 1$
Τότε υπάρχουν μοναδικοί $q, z \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $b = qa + z$
και $z \in \{0, 1, 2 \dots a-1\}$



(Έστω $a = 2$, $b = 11$)
$B = \{b - na \in \mathbb{N}$ με $n \in \mathbb{N}\}$
$b - 0 \cdot a = b \in \mathbb{N}$ με $0 \in \mathbb{N}$, $B \neq \emptyset$ $(0 \in B)$

$B \neq \emptyset$, $B \subseteq \mathbb{N} \xRightarrow[\text{Ελαχίστου}]{\text{Αρχή}}$ $q \in \mathbb{N}$, με $b - qa$ = ελάχιστο στοιχείο του B

Τοτε $b = aq + r \quad r \geq 0$
Θα αποδείξουμε οτι $0 \leq r \leq a-1$, $r \in \mathbb{N}$

Εστω οτι το $r \geq a$ δηλ $b - aq \geq a$
$\Rightarrow \underbrace{b-(q+1)a}_{\in \mathbb{N}} \geq 0 \quad \Rightarrow b-(q+1)a \in B$ / $\Rightarrow$
Ομως $b-(q+1)a < b - qa$

Ατοπο διοτι $b - qa =$ ελ στοιχειο του B
Μοναδικοτητα: Εστω $b = aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$
οπου $0 \leq r_1, r_2 < a$. Χωρις περιορισμο της
γενικοτητας υποθετουμε οτι $r_1 \geq r_2$ ($q_1 \leq q_2$)
Τοτε $r_1 - r_2 = a(q_2 - q_1)$ βλεπε σελ.51
Αν $q_1 < q_2$, τοτε $a(q_2 - q_1) \geq a$ ενω $r_1 - r_2 < a$
Εχουμε αντιφαση, άρα $q_1 = q_2$ και $r_1 = r_2$

Πορισμα: Εστω οτι $n \in \mathbb{N}$ ($\alpha = 2$) τοτε $n = 2q$ ή $n = 2q+1$
($r \in \{0,1\}$) Αρα όλα οι αριθμοι αρτιοι ή περιττοι
Εαν $n = 2q$ καλειται άρτιος ή ζυγος "(αποκλειστικά)
$n = 2q+1$ καλειται περιττός/Μονος
$n = 0$ καλειται Ζυγός
$n = 1$ καλειται περιττος

Ασκηση
Το n άρτιος $\Leftrightarrow n^2 =$ άρτιος
το k περιττòς $\Leftrightarrow k^2 =$ περιττòς
Λυση: Εστω n άρτιος, $n = 2v$ για κάποιο $v \in \mathbb{N}$ τοτε
$n^2 = 2(2v^2)$ με $2v^2 \in \mathbb{N}$ άρα $n^2 =$ άρτιος
Εστω οτι $n^2 =$ άρτιος ενω ο n ειναι περιττός τοτε
$n = 2\mu + 1$ (για καποιο $\mu \in \mathbb{N}$), άρα $n^2 = 2(2\mu^2 + 2\mu) + 1$ άτοπο
διότι ο $n^2 =$ άρτιος.

Μάθημα 9: 29/12/12
Ορίσαμε το $\mathbb{N}$, τους φυσικούς αριθμούς σαν το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο.
Επαγωγή: Εφαρμόζεται όταν θέλουμε να ισχύει μια ιδιότητα για φυσικούς αριθμούς ή με $k \geq n_0$ για φυσικούς.

Ακέραιοι Αριθμοί: Ορίζουμε το σύνολο των ακεραίων, το σύνολο του $\mathbb{N}$ ένωση $-\mathbb{N}$, δηλ $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}))$
όπου $\mathbb{N}$: το σύνολο των φυσικών αριθμών
$-\mathbb{N}$: το σύνολο $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Z}$ σύνολο των ακεραίων αριθμών / $\{ \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \}$

Το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό στις πράξεις, προσθέσεις, πολλαπλασιασμό (δηλ αν πολλ/ω ακεραίους ή τους προσθέσω θα προκύψει ακέραιος) κ ικανοποιούνται οι $(\Pi_1 - \Pi_4)$, (Π_5), $(\Pi_7, \Pi_8, \Pi_9, \Pi_{10} - \Pi_{13})$ → εξάσκηση και δεν ικανοποιείται η Π_6 (πχ. $2 \in \mathbb{Z}$, $2^{-1} \notin \mathbb{Z}$)

Δύσκολο σημείο στο "+"
Παρατηρούμε ότι $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ (γνήσιο υποσύνολο του)
πχ. $(-1 \in \mathbb{Z},\ -1 \notin \mathbb{N})$

- Ρητοί Αριθμοί
Το σύνολο των ρητών είναι της μορφής
$Q = \left\{ \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$ (→ $n \in \mathbb{N}$ για να μην έχουμε προβλήματα τύπου $\frac{-a}{-a}$)
Το σύνολο των Ρητών Αριθμών: Q

Το Q είναι κλειστό στις πράξεις "+", "·" και ικανοποιούνται όλες οι $\Pi_1 - \Pi_{13}$!!

Έχουμε $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ (πχ $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)

Ο κάθε ρητός έχει πολλές γραφές
Παίρνουμε $\frac{m}{n}$ όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
Για $n=1$
Τότε $\frac{m}{1} = m \in \mathbb{Z}$ μοναδική γραφή.

όταν $m=1$ ή $m=-1$ τότε πάλι η γραφή $\frac{\pm 1}{n}$ μοναδική

Ας υποθέσουμε ότι $n \geq 2$ και ότι $m \geq 2$ (n, m φυσικοί αριθμοί)
κ έχουμε το κλάσμα $\frac{m}{n}$. Αυτό έχει πολλές γραφές
του ίδιου πράγματος $\frac{2m}{2n}$, $\frac{3m}{3n}$

» Για να έχουμε μια γραφή, αναλύουμε αριθμητή κ παρονομαστή
σε γινόμενο πρώτων αριθμών

$m = p_1 \cdot p_2 \ldots p_\nu$ $\quad p_i$ = πρώτοι αριθμοί
$n = q_1 \cdot q_2 \ldots q_\lambda$ $\quad q_i$ = πρώτοι αριθμοί

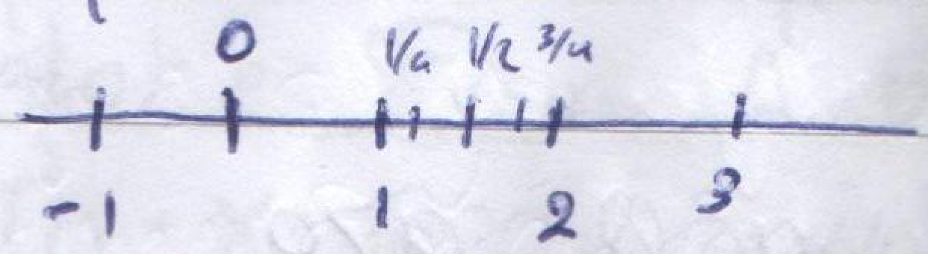
Όταν το $\frac{m}{n} = \frac{p_1 \cdot p_2 \ldots p_\nu}{q_1 \cdot q_2 \ldots q_\lambda}$ κάνουμε την απλοποίηση

$= \frac{p_1' \cdot p_2' \ldots p_\nu'}{q_1' \ldots q_\lambda'}$ Ανάγωγος μορφή του $\frac{m}{n}$

πχ. $\frac{24}{100} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{6}{25}$

Αν $m \in (-\mathbb{N})$: Αναλύουμε το $-m \in \mathbb{N}$

Αναπαράσταση $\mathbb{Q}$: Τοποθέτηση $\mathbb{Q}$ πάνω σε ευθεία

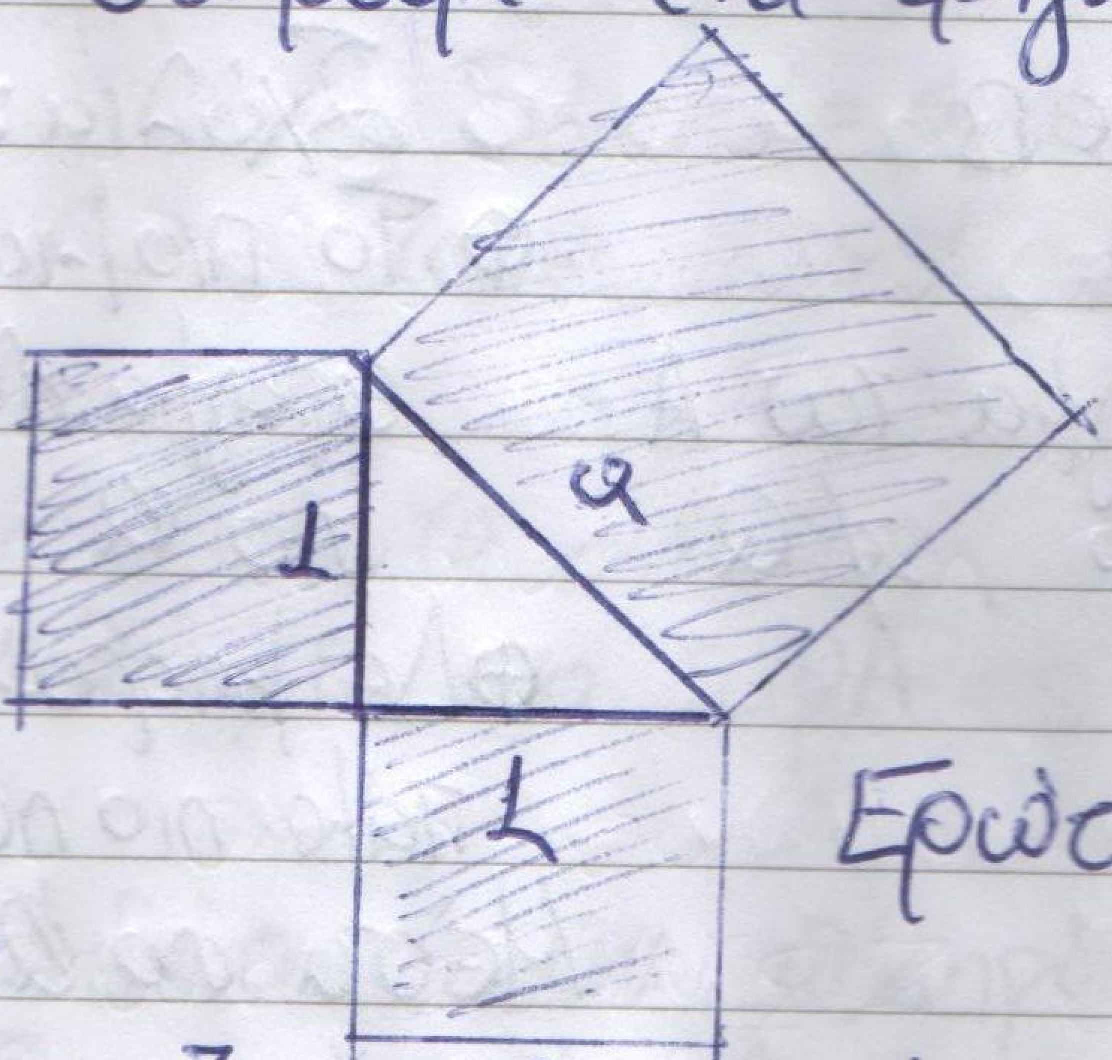


Τοποθετούμε το μηδέν σε κάποιο σημείο της ευθείας & επιλέγουμε το 1 να βρίσκεται στα δεξιά του

Ερώτημα: Το σύνολο $\mathbb{Q}$ ικανοποιεί τα $\Pi_1 - \Pi_{13}$
Είναι αρκετό για να περιγράψει τη λύση όλων των προβλημάτων που παρουσιάζονται;;;

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τα [illegible] : Είναι αρμονική κατάσταση

Στη πραγματικότητα όλα τα φαινόμενα δε περιγράφονται από ρητούς. Θεωρούμε ένα τρίγωνο



Από Πυθαγόρειο Θεώρημα
$a^2 = 1^2 + 1^2$
$a^2 = 2$

Ερώτημα: $\exists\ a>0$, $\underline{a\in\mathbb{Q}}$ με $a^2=2$

Απόδειξη:
Έστω ότι $\exists\ a = \frac{m}{n} > 0$ με $\frac{m}{n}$ ανάγωγο κλάσμα ώστε $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 =$ άρτιος $\xrightarrow{\text{Άσκηση}}$ $m =$ άρτιος

$m = 2\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{N} - \{0\}$

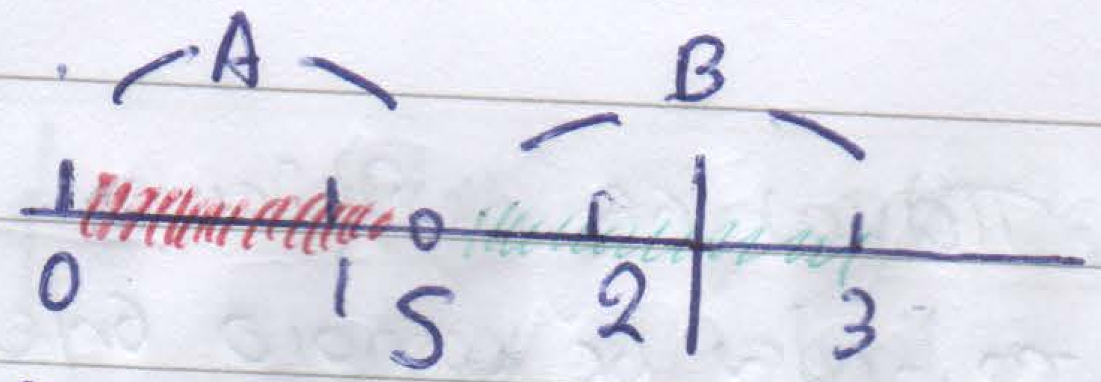
Απόδειξη Ευδόξου.

Άρα θα έχουμε $\begin{cases} m^2 = 2n^2 \\ m = 2\lambda \ (\lambda\in\mathbb{N}) \end{cases}$

$\Rightarrow n^2 = 2\lambda^2$ ($\lambda^2 \in \mathbb{N}$ γινόμενο φυσικών, φυσικός)
$\Rightarrow n^2 =$ άρτιος $\xrightarrow{\text{Άσκηση}}$ $n =$ άρτιος
$n = 2\mu$, $\mu \in \mathbb{N} - \{0\}$

Επομένως $\frac{m}{n} = \frac{2\lambda}{2\mu}$ $\underline{\text{Άτοπο}}$ διότι $\frac{2\lambda}{2\mu}$ δεν είναι ανάγωγο

δηλ. ένα ανάγωγο είναι ίσο με ένα μη ανάγωγο



Τι δεν έχει το $\mathbb{Q}$ ώστε να υπάρχει $a \in \mathbb{Q}$, $a>0$ με $a^2 = a \cdot a = 2$;

Παίρνουμε $A = \{q \in \mathbb{Q} : q>0$ και $q^2<2\}$
$B = \{p \in \mathbb{Q} : p>0$ και $p^2>2\}$

Αν πάρουμε $\mathbb{Q}^+ = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$

- Τι ιδιότητες έχει το s σε σχέση με το $q \in A$

$q \in A \Rightarrow q^2 < 2 \Rightarrow q < 2, 3, 4.$

Αν $p \in B \Rightarrow p^2 > 2 \Rightarrow q < p \ \forall p \in B$

Δηλ αν πάρουμε $p \in B$ είναι φράγμα του A
$s =$ ελάχιστο των άνω φραγμάτων, $s \notin \mathbb{Q}$
Αυτό είναι το Suprem του A

Παίρνουμε το B
Τα στοιχεία του A αποτελούν κάτω φράγματα του B
απ' όλα τα κάτω φράγματα, το πιο σημαντικό είναι το s (το μεγαλύτερο)
Αυτό είναι το inf

Σχόλια:
⊕ Το πιο μικρό φράγμα δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}$
⊕ Δε μπορούμε να πάμε πιο πέρα.
Μέσα στο $\mathbb{Q}$ το πιο σημαντικό φράγμα θα ήταν το s. Το μικρότερο απ' όλα τα φράγματα είναι το ελάχιστο των άνω φραγμ.
Το $s \notin \mathbb{Q}$

Πληρότητα των πραγματικών αριθμών

Ορισμοί: Έστω $A, B \neq \emptyset$ σύνολο πραγ. αριθμών

1) Το x πραγματικός αριθμός είναι άνω φράγμα του A
$\iff$ $a \le x$ για κάθε $a \in A$

Εάν υπάρχει άνω φράγμα του A, τότε το A το λέμε
Άνω φραγμένο σύνολο

Έστω $A \neq \emptyset$, A = άνω φραγμένο

2) Το s καλείται supremum του A, $\sup(A)$
$\iff$
- i) $a \le s$ ($\sup A$) $\forall a \in A$
  ($\sup A$ είναι άνω φράγμα)
- ii) Εάν s' = άνω φράγμα του A
  τότε $s \le s'$ (ελάχιστο άνω φράγμα του A)

Άσκηση Για το Σπίτι: $A \neq \emptyset$, A άνω φράγμα.
Εάν υπάρχει το $\sup A = s$ είναι μοναδικό

(Π1.4) Ιδιότητα της πληρότητας
Έστω $A \neq \emptyset$, A υποσύνολο πραγμ. αριθμών
A = άνω φραγμένο
Τότε $\exists$ s = πρ. αριθμός $s = \sup A$

$B \neq Q$

B κάτω φραγμένο $\Leftrightarrow$ αν υπάρχει y πραγμ. αριθμός ώστε $b \geq y$ για $\forall b \in B$.

• Το $\ell = \inf B \Leftrightarrow$ ισχύουν

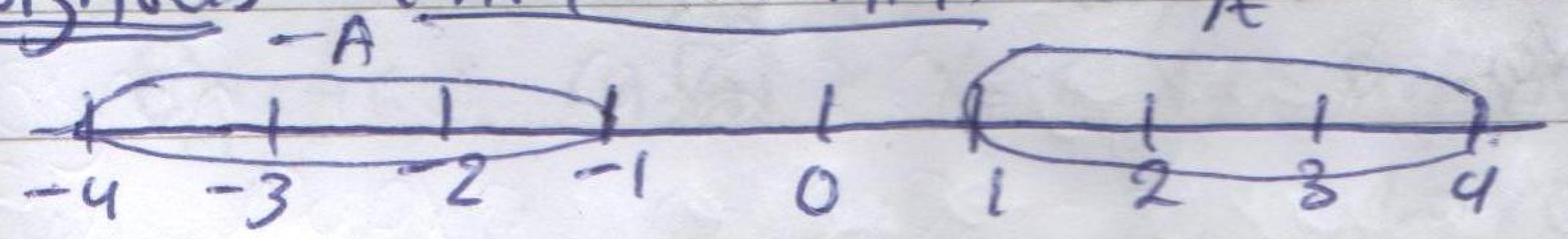
i) $b \geq \ell \quad \forall b \in B$ (ℓ κάτω φράγμα)

ii) αν $\ell' =$ κάτω φράγμα του B τότε $\ell' \leq \ell$
($\ell =$ μεγαλύτερο των κάτω φραγμάτων)

(Π_{14}') Εάν $B \neq Q$ κάτω φραγμένο $\exists \inf B \in \mathbb{R}$

Ορισμός $\mathbb{R}$ (+), (·), "≤" ικανοποιεί $\Pi_1 - \Pi_{14}$
Καλείται σύνολο πρ. αριθμών

Ασκήσεις ($\Pi_{14} \Leftrightarrow \Pi_{14}'$)



1) Θεωρούμε $A \neq \emptyset$ θα αποδείξουμε A άνω φραγμένο αν και μόνο αν $\Leftrightarrow$ $-A$ είναι κάτω φραγμένο
$(-A = \{-a \in A\})$

Τότε το $\boxed{\sup A = -\inf(-A)}$

Λύση: ($\Rightarrow$) A = άνω φραγμένο και x άνω φράγμα του A
Τότε $a \leq x \quad \forall a \in A$

Άρα το $(-x)$ είναι κάτω φράγμα του $-A$
δηλ $-A =$ κάτω φραγμένο

($\Leftarrow$) Άσκηση για το σπίτι (όμοια)

Θα αποδείξουμε $\sup A = -\inf(-A)$

$\exists\, s = \sup A \in \mathbb{R}$ (Π1α) — $s \geq a \ \forall a \in A$ — αν s' άνω φράγμα του A τότε $s \leq s'$

Άρα — $-s \leq -a$, $-a \in -A$ ($-s$ = κάτω φράγμα) — αν $-s'$ = κάτω φράγμα τότε $-s \geq -s'$

$-s = \inf(-A)$

$\sup A = -\inf(-A)$

$\sup(A) = -\inf(-A)$ (το $\sup(-B) = -\inf(-(-B)) = -\inf(B)$)

$\sup(-B) = -\inf(B)$

2) Π1α $\Leftrightarrow$ Π'1α /δηλ η Π1α είναι ισοδύναμη με Π'1α

Έστω $B \neq \emptyset$ κάτω φραγμένο $\overset{\text{αοκ}}{\Longrightarrow}$ $-B$ = άνω φραγμ.

$\underset{\text{Π1α}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, s = \sup(-B)$ $\underset{\text{αοκ}}{\Longrightarrow}$ $\inf(B) = -s \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις Σωστού - Λάθους

1) $A = \emptyset$. $A \subseteq \mathbb{R}$ A = άνω φραγμ.

Τότε $a \leq \sup A$ $\forall a \in A$

Σωστό: διότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A (από ορισμό)

2) $A = \emptyset$ κ y άνω φράγμα του A τότε

$\sup(A) \leq y$

Σωστό: διότι το $\sup(A)$ είναι το ελάχιστο των άνω φραγμ.

3) $A \neq \emptyset$, A = άνω φραγμένο τότε για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ με $x \geq \sup A \Rightarrow x$ = άνω φράγμα

$a \leq \sup(A) \leq x$ $\forall a \in A$

Άρα το x = άνω φράγμα του A

Συμβολισμός: Το σύνολο των άνω φραγμάτων του A είναι $\Phi_A = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq \sup A\}$

4) $A \neq \emptyset$ φραγμένο σύνολο (Άνω & κάτω φραγμένο σύνολο)
Τότε $\inf A \leq \sup A$

$a \in A$ → $\inf A \leq a$ ($\inf A$: κάτω φράγμα του A)

$a \in A$ → $a \leq \sup A$ ($\sup A$: άνω φράγμα του A)

Άρα $\inf A \leq \sup A$

5) $A \neq \emptyset$ φραγμένο σύνολο. Τότε $\inf(A) = \sup(A) \iff$ A μονοσύνολο

Πάμε αντίστροφα ($\Leftarrow$) $A = \{a\}$ $\quad a \leq a \leq a$, $\inf A = \sup(A)$

($\Rightarrow$) Έστω ότι έχει 2 στοιχεία $x_1 < x_2$

Έχουμε $\inf(A) \leq x_1 \leq x_2 \leq \sup(A)$

↳ γιατί το sup άνω φράγμα

Επομένως ισχύει $\inf A < \sup A$ Άτοπο

Άρα το A είναι μονοσύνολο

6) $A \neq \emptyset$, b άνω φράγμα του A, με $b \in A$

Τότε $b = \sup A$: (Σ) γιατί $b \in A \Rightarrow b \leq \sup A$

b = άνω φράγμα του $A \Rightarrow a \leq b \quad \forall a \in A$ / $b \geq \sup A$

Τελικά $b = \sup A$

Άσκηση

1) $A \neq \emptyset$, $A \subseteq B$, $B =$ φραγμένο τότε

i) A είναι φραγμένο :

ii) $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

Να τη θεφοράσετε :

Λύση : i) + ii) $a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow \alpha \leq \sup B$

Άρα το A είναι φραγμένο άρα $\sup B$ άνω φράγμα του B

$\Rightarrow \sup A \leq \sup B$

$\sup A =$ ελάχιστο άνω φραγμάτων του A

Το υπόλοιπο μόνοι μας...

2) $A, B \neq \emptyset$ φραγμένα. Τότε το $A \cup B$ είναι φραγμένο

i) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

ii) $\inf(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\} \rightarrow$ Σπίτι

Απόδειξη:

i) Έστω $x \in A \cup B$

$x \in A \xrightarrow{A \text{ φραγμ}} x \leq \sup A$ γι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα

ή

$x \in B \xrightarrow[\text{φραγμένο}]{B} x \leq \sup B$

Συνεπώς $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ (1)

$A \cup B =$ άνω φραγμένο (Π14) $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$

$A \subseteq A \cup B \xrightarrow[\text{άσκηση}]{\text{από προηγ}} \sup A \leq \sup(A \cup B)$

$B \subseteq A \cup B \Longrightarrow \sup B \leq \sup(A \cup B)$

Άρα $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$ (2)

Τελικά από (1), (2) έχουμε $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

3) Θεωρούμε A, B φραγμένα, $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$
Τότε $A+B$ φραγμένο και
i) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
ii) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

Ιδιαιτέρως Εάν A είναι μονοσύνολο τότε το $\sup(\alpha + B) = \alpha + \sup B$
$\inf(\alpha + B) = \alpha + \inf B$

Σημείωση: Εάν ξέρω το $\inf \frac{1}{n}$ ξέρω και της $\frac{5}{n}$ από αυτό διότι sup άνω φράγμα

$a \in A$, $b \in B$. Τότε $a \leq \sup A$, $b \leq \sup B$
άρα $\alpha + b \leq \sup A + \sup B$

Επίσης $\alpha + b \in A+B$. $A+B$ = άνω φραγμένα. Έτσι από (Πιμ) έχει sup.

$\sup A + \sup B$ = άνω φράγμα του $A+B \Rightarrow$
$\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ (1)

Έστω b = σταθερό (τυχαίο $b_0 \in B$)
$\underbrace{a}_{} = (a+b) - b \leq \underline{\sup(A+B)} - b_0 \quad \forall a \in A$

άρα $\sup A \leq \sup(A+B) - b_0$

Αποσταθεροποιούμε το b (δηλ τώρα το κινούμε)
$b \leq \sup(A+B) - \sup A$, $b \in B$
$\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A \Rightarrow$
$\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο

Μάθημα 11° - 2-11-2012

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Έστω $A \neq \emptyset$, A = άνω φραγμένο

Υπενθύμιση $A \neq \emptyset$, A = άνω φρ
$s \in \mathbb{R}$ - i) $a \leq s$, $\forall a \in A$
ii) αν $s' \in \mathbb{R}$ με $a \leq s'$ $\forall a \in A$ τότε $s \leq s'$

i) Εάν $t > 0$ → $\sup(tA) = t \sup A$
→ $\inf(tA) = t \inf A$ → Σπίτι

$\sup(-A) = -\inf A$ για $t = -1$

ii) Εάν $t < 0$ → $\sup(tA) = t \inf A$
→ $\inf(tA) = t \sup A$ → Σπίτι

Λύση:

i) • Θεωρούμε $t > 0$

Για οποιοδήποτε $a \in A$, $a \leq \sup A$ (sup. άνω φράγμα)

$\underset{(t>0)}{\Rightarrow}$ $ta \leq t \sup A$ (άνω φράγμα του $tA \Rightarrow tA$ άνω φραγμένο)

Άρα το $\sup(tA) \leq t \sup A$ (1)

• Θεωρούμε $a \in A$, $a = \frac{1}{t}(ta) \leq \frac{1}{t} \sup(tA)$ γτ το $\sup(tA)$ είναι φράγμα του ta

$\Rightarrow \sup A \leq \frac{1}{t} \sup(tA) \Rightarrow t \sup A \leq \sup(tA)$ (2)

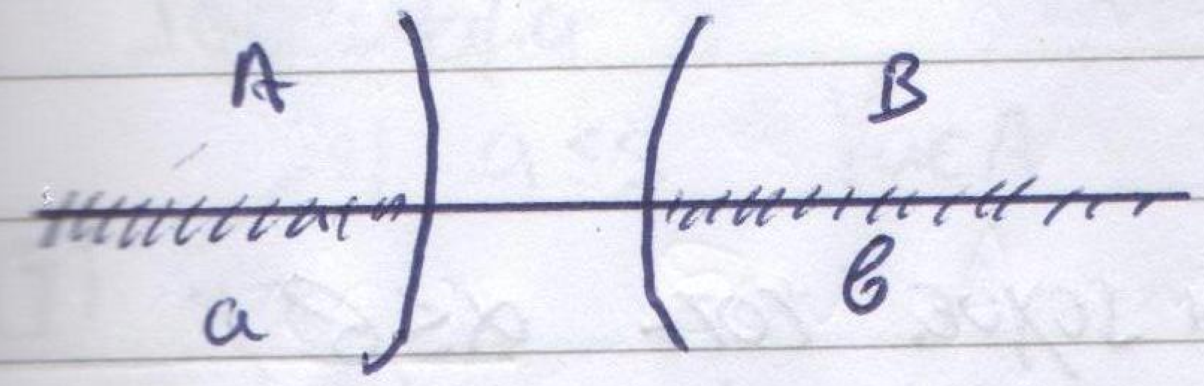
Από (1),(2) $\sup(tA) = t \sup A$

ii) $\underset{\substack{t<0 \text{ (i)} \\ -t>0}}{\sup(tA)} = \sup((-t)(-A)) = -t \sup(-A) = (-t)(-\inf A) = t \inf A$

Άσκηση 5

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$ ισχύει $a \le b$

Τότε $\exists \sup A, \inf B \in \mathbb{R}$ και $\sup A \le \inf B$



Δεν επικαλύπτονται

Από $a \le b$ — a: άνω φραγμένο / b: κάτω φραγμένο

Σταθεροποιούμε

$b_0 \in B$ Τότε $\alpha \le b_0$ $\forall a \in A$

Άρα το A είναι άνω φραγμένο και το $\sup A \le b_0$

Επομένως ισχύει το $\sup A \le b$.

Επίσης B = κάτω φραγμένο $\xRightarrow{\text{Πλη}}$ $\exists \inf B \in \mathbb{R}$

Το $\sup A$ = κάτω φράγμα του B

Άρα $\sup A \le \inf B$ (γτ το $\inf B$ είναι το πιο μεγάλο από τα κάτω φράγματα)

$\boxed{\text{Το "}\varepsilon > 0\text{" στην Μαθηματική Ανάλυση}}$ * *

Ασκήσεις:

Άσκηση 1

Έστω $a \ge 0$ και $\alpha < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ Τότε $\alpha = 0$

$a \ge 0$ — $\alpha > 0$ / $a = 0$

$\alpha > 0$: Πρέπει να το αποκλείσουμε.

Έστω ότι ισχύει

Για $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ Θα ισχύει $0 < a < \frac{a}{2}$

$\Rightarrow 2 < 1$ Άτοπο

Άρα $\alpha = 0$

2) Έστω $\alpha \geq 0$ και $\alpha \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ $\Longleftrightarrow$
Τότε $\alpha = 0$
Λύση: Ανάλογη της 1)

Άσκηση 3
Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha < \beta + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ σα ισχύει τότε $\alpha \leq \beta$

α, β — $\alpha > \beta$ τότε α $a - \beta < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ Άτοπο
Η παραδοχή που θέλαμε να καταρίψουμε
— $\alpha \leq \beta$

Άρα $\alpha \leq \beta$

Άσκηση 4
Εάν $a \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \varepsilon$ για $\forall \varepsilon > 0$. Τότε $\alpha \leq 0$
Λύση: Βάζω $\beta = 0$ στην 3)

Άσκηση 5
$a, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta - \varepsilon < a < \beta + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$
Τότε $\alpha = \beta$

Λυση
$$\left.\begin{array}{l} a \leq \beta + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \alpha \leq \beta \\ \beta \leq a + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \beta \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

β' τρόπος $0 \leq |\alpha - \beta| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$
Άρα απο 1) $|\alpha - \beta| = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

Πρόταση: ε-αριομός του $\sup A$, $\inf B$

1) Έστω $A \neq \emptyset$, A = άνω φραγμένο και $s \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

(I)
 i) $a \leq s \quad \forall a \in A$
 ii) αν $s' \in \mathbb{R}$ με $a \leq s'$ τότε $s \leq s'$ $\quad (\Longleftrightarrow \sup A = s)$

(II)
 i) $a \leq s \quad \forall a \in A$
 ii) για $\epsilon > 0 \ \exists a_\epsilon \in A$ με $s - \varepsilon < a_\epsilon$

$s = \sup A$, $s-\varepsilon$ δεν είναι φράγμα

Αφού δεν είναι φράγμα κάποιο στοιχείο του A είναι μεγαλύτερο
(π.χ. $A = \{-100, 1\}$ $\sup A = 1$ κ αν $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $s - \varepsilon = \frac{1}{2} \notin A$)

2) $B \neq \emptyset$, B = κάτω φραγμένο και $t \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(I)
 i) $b \geq t \quad \forall b \in B$
 ii) αν $t' \in \mathbb{R}$ με $t' < b \quad \forall b \in B$ τότε $t \geq t'$

Ας υποθέσουμε

$t = \inf B$, b_ε, $t + \varepsilon$

(II)
 i) $b \geq t \quad \forall b \in B$
 ii) για $\varepsilon > 0 \ \exists b_\varepsilon \in A$ με $b_\varepsilon < t + \varepsilon$

Απόδειξη 1) (I) $\Longleftrightarrow$ (II)

Έστω ότι ισχύει το (I) $\to$ i) ίδιο με το (II) i) $\quad \to$ ii)

Πρέπει να αποδείξουμε ότι αν $s = \sup A$ (I) τότε $\forall \epsilon > 0$
$\exists a_\varepsilon \in A : s - \varepsilon < a_\varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$. Το $s - \varepsilon < s$. Άρα $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A, διότι το s είναι το μικρότερο άνω φράγμα.
Άρα αφού δεν είναι άνω φράγμα θα $\exists\ a_\varepsilon \in A$ με $s - \varepsilon < a_\varepsilon$

Άρα (I) $\Rightarrow$ (II)

Έστω ότι ισχύει II, ii)

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το (II) $\Rightarrow$ (I)

Έστω ότι το s δεν είναι το $\sup A$

τότε θα υπάρχει $\gamma = \sup A \in \mathbb{R}$

s = άνω φράγμα (I, i) $s \geq a$ $\forall a \in A$

$s > \gamma$, για να χρησιμοποιήσουμε (II) θα πάρουμε $\varepsilon = s - \gamma > 0$

από ii) $\exists a_\varepsilon : \gamma = s - \varepsilon < a_\varepsilon$

Άρα το $\gamma = \sup A$ <u>δεν</u> είναι άνω φράγμα <u>Άτοπο</u>

<u>ή</u>) Έστω s' άνω φράγμα με $s > s'$ τότε $\varepsilon = s - s' > 0$

$\exists a_\varepsilon \in A : s' = s - \underbrace{(s - s')}_{=\varepsilon} < a_\varepsilon$

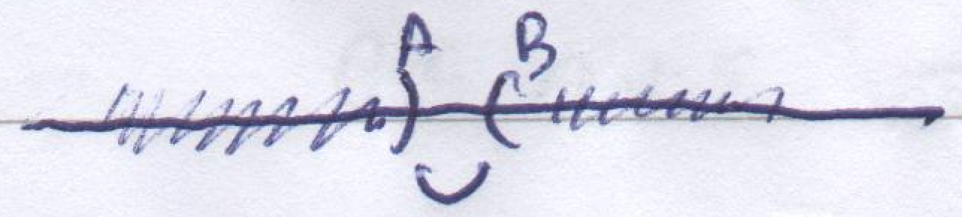
Άτοπο, γτ υποθέσαμε ότι s' = άνω φράγμα του A

<u>Ασκήσεις Σωστό-Λάθους</u>

1) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ώστε i) $a \leq b$ για $\forall a \in A$, $b \in B$

ii) για $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$, $b_\varepsilon \in B$: $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$

Τότε $\sup A = \inf B$



απόσταση όσο θέλουμε μικρή

<u>Λύση</u>: (άσκηση 5, σελ 47) $\rightsquigarrow$ $\sup A \leq \inf B$ (1)

Θεωρούμε τυχαίο $\varepsilon > 0$ (σταθεροποιούμε αφού τυχαίο ισχύει για όλα)

$\exists a_\varepsilon \in A$, $b_\varepsilon \in B$: $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$

$$\begin{cases} b_\varepsilon < a_\varepsilon + \varepsilon \leq \sup A + \varepsilon \\ \inf B \leq b_\varepsilon \end{cases}$$

$\underbrace{\inf B}_{\gamma} < \underbrace{\sup A + \varepsilon}_{\delta}$ $\Rightarrow$ $\inf B \leq \sup A$ (2)

Άρα (1), (2) έχουμε $\inf B = \sup A$

2) Θέμα $A \neq \emptyset$, άνω φραγμένο.   εδώ το πρόβλημα.

$s = \sup A$ Τότε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : s - \varepsilon < a < s$

<u>Λάθος</u> πχ. $A = \{-10, 5\}$ $\sup A = 5$ έστω $\varepsilon = 2 > 0$

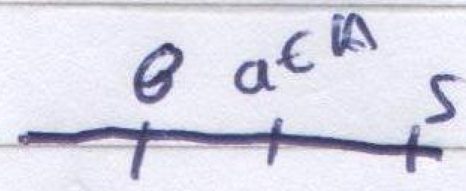
δεν $\exists \ a \in A$ με $3 < a < 5$

ή $A = \{a\}$ εδώ $a = \sup A = \inf A$

3) $A \neq \emptyset$. $A =$ άνω φραγμένο, $s = \sup A \in \mathbb{R}$

έστω $b < s$ τότε

υπάρχει $a \in A : b < a \leq s$



Σωστό!!!

Το b δεν είναι άνω φράγμα

Άρα $\exists \ a_0 > b$
$(s \geq)$

Μοναδικότητα Supremum

Έστω s_1, s_2

$s_1 =$ φράγμα, $s_2 =$ ελ. άνω φράγμα $\Rightarrow s_2 \leq s_1$ } $\Rightarrow$ <u>$s_2 = s_1$</u>

$s_2 =$ φράγμα, $s_1 =$ ελ. άνω φράγμα $\Rightarrow s_2 \geq s_1$

από σελίδα 34