Μάθημα 12ο: 5-11-2012

ΠΠΚ: $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ κ A = άνω φραγμένο
$\Rightarrow \exists\ s = \sup A \in \mathbb{R}$ (ελάχιστο άνω φράγμα)

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} s \leq a & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists\ a_\varepsilon \in A \text{ με } s - \varepsilon < a_\varepsilon \end{cases}$$

Πρώτες Συνέπειες του ΠΠΚ

I) Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$
II) Ύπαρξη κ ρίζας ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$) θετικού αριθμού
III) Ύπαρξη ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού
IV) Πυκνότητα του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
V) Πυκνότητα του συνόλου $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ των αρρήτων στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

I) Πρόταση

i) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο σύνολο

ii) *Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$ *
Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ (σταθεροποίηση δεν τρέχουν)
Τότε $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \varepsilon > a$

iii) Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: αν $n \geq n_0$
τότε $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Απόδειξη

i) Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο.
από ΠΠΙ4 $\Rightarrow \exists\ s = \sup\mathbb{N} \in \mathbb{R}$
δηλ $n \leq s$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ (1)

$s-1 < s =$ ελάχιστο άνω φράγμα $\Rightarrow s-1$ δεν είναι άνω φράγμα
$\Rightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > s-1$
Τότε $n_0+1 \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ επαγωγικό), $n_0+1 > s$ Αντίφαση στην (1)
Άρα το $\mathbb{N}$ δεν έχει άνω φράγμα.

ii) Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Επομένως το $\frac{a}{\varepsilon}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$
Άρα $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{a}{\varepsilon}$. Άρα $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ (\varepsilon > 0) : n_0 \varepsilon > a$

iii) Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο $\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}\ (>0)$ δεν είναι άνω φράγμα. Επομένως $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\varepsilon}$ για $\forall n \geq n_0$
$(n_0 > \frac{1}{\varepsilon})$

Άρα $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ για $n \geq n_0$

Ισοδυναμία όλα αυτά με Αξίωμα Αρχιμήδη $n_0 \varepsilon > a$

(Η αρχιμήδεια ιδιότητα δε μπορεί να αντικαταστήσει τη (ΠΠΙ4) π.χ. στην ύπαρξη ριζών)

II) Πρόταση / Ύπαρξη κ ρίζας θετικού αριθμού
Να τη γνωρίζουμε ως απόδειξη

Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και $a > 0$ (Σταθεροποιούνται)
Τότε υπάρχει μοναδικός $s > 0$ με $s^k = a$
⇓
ανατρέχω στη Π14

» Πρώτα δείχνουμε ότι υπάρχει κ μετά το προσεγγίζουμε

Συμβολισμός: $s = a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$

Απόδειξη:
1η Περίπτωση: $0 < a < 1$
$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ και } x^k < a\}$

- $A \neq \emptyset$ ($a > 0$, $\underset{(0<a<1)}{a^k < a}$, άρα $a \in A$)
- A είναι άνω φραγμένο (Εάν $x > 0$, $x^k < a (<1)$ $\Rightarrow x < 1$)

Άρα Μη κενό κ' άνω φραγμένο, από (Π14)
υπάρχει $s = \sup A$: $0 < a \leq s \leq 1$ ⇝ άνω φράγμα
$a \in A$ ↳ ελάχιστο άνω φραγμάτων

Για τους πρ. αριθμούς s^k, a ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής (από (Π11) αρχή της τριχοτομίας)
1) $s^k < a$
2) $s^k > a$
3) $s^k = a$

Για να αποδείξουμε το 3)
Πρέπει να αποκλείσουμε το 1) κ το 2)
για να έχουμε το ζητούμενο

(ο κοινή απόδειξη για όλα τα βιβλία έως εδώ)

Ισχυρισμός 1 Εάν $s^k < a$ τότε $\exists n_1 \in \mathbb{N}$:
$\left(s+\frac{1}{n_1}\right)^k < a$ (Απόδειξη στο τέλος. Θεωρούμε ότι ισχύει)

Τότε $s+\frac{1}{n_1} \in A \Rightarrow \overset{\geq 0}{s} + \overset{>0}{\frac{1}{n_1}} \leq s = \sup A$ Άτοπο

Άρα η 1) δεν ισχύει

Ισχυρισμός 2 Εάν $s^k > a$ τότε $\exists n_2 \in \mathbb{N}$: $s-\frac{1}{n_2} > 0$,
και $\left(s-\frac{1}{n_2}\right)^k > a$ (Απόδειξη στο τέλος)

Τότε $\forall x \in A$ $\underbrace{x^k}_{>0} < a < \underbrace{\left(s-\frac{1}{n_2}\right)^k}_{>0} \Rightarrow \forall x \in A$ $0 < x < s - \frac{1}{n_2}$

Άρα $0 < s - \frac{1}{n_2}$ άνω φράγμα του A
Άτοπο (γιατί το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A)

Άρα η 2) δεν ισχύει. Τελικά ισχύει η 3) $s^k = a$

2η Περίπτωση: $a > 1$
Παίρνουμε $0 < \frac{1}{a} < 1$ τότε από Περίπτωση 1 υπάρχει
$t > 0$: $t^k = \frac{1}{a} \Rightarrow \exists \frac{1}{t}$, $t > 0$: $\alpha = \left(\frac{1}{t}\right)^k$

Απόδειξη του Ισχ 1
Έστω ότι $s^k < a$ και για $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(s+\frac{1}{n}\right)^k \geq a$
Από Διωνυμικό Ανάπτυγμα Νεύτωνα

$\xleftarrow{\text{Πηγαίνω ανάποδα}}$

$$s^k + \underbrace{\left[\binom{k}{1} + \dots \binom{k}{k}\right]}_{\beta > 0} \frac{1}{n} \geq s^k + \binom{k}{1} s^{k-1} + \dots + \binom{k}{k} \frac{1}{n^k} = \left(s+\frac{1}{n}\right)^k \geq a$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 < s < 1 \\ 0 < \frac{1}{n^\nu} \leq \frac{1}{n} \quad \nu = 1, 2 \dots k \end{array}\right)$$

Άρα $\frac{\beta}{n} \geq a - s^k > 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \frac{\beta}{\alpha - s^k}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ / Καταλήξαμε με την υπόθεση ότι $\mathbb{N}$ φραγμένο Άτοπο!

Άρα $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $\left(s+\frac{1}{n_1}\right)^k < a$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2

Καταρχάς $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : s - \frac{1}{n_0} > 0$ (γτ το $\frac{1}{n_0}$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Από Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

Έστω ότι δεν ισχύει ο Ισχ. 2

δηλ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ $\left(s - \frac{1}{n}\right)^k \leq a$

$$s^k\left(1 - \frac{1}{ns}\right)^k = \left(s - \frac{1}{n}\right)^k \leq a \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{Από Bernoulli}$$

$$s^k\left(1 - \frac{k}{ns}\right) \leq \ \overset{s^k > a}{\Longrightarrow} \ 0 < s^k - a \leq \frac{ks^k}{ns} \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow n \leq \frac{ks^k}{s(s^k - a)} \ \forall n \geq n_0$$

Άτοπο, ($\mathbb{N} = \{0,1,\dots,n_0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ θα ήταν φραγμένο)

III) Ύπαρξη Ακέραιου μέρους πρ. αριθμού

Λήμμα: Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{Z}$, A = άνω φραγμένο
Τότε το $\sup A \in A$ $(\subseteq \mathbb{Z})$

Απόδειξη: Έστω ότι $\exists\, A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{Z}$, A = άνω φραγμένο με $s = \sup A \in \mathbb{R}$, $s \notin A$
(από Π14)

Τότε $\exists\, a_1 \in A : s - 1 < a_1 < s$ (τοσδε ξέρω ότι είναι ακέραιος)

$a_1 \in A$ ($s \notin A$)

$a_1 < s$, $\exists\, a_2 \in A : a_1 < a_2 < s$

δηλ $\exists\, a_1, a_2 \in A \subseteq \mathbb{Z}$
$s - 1 < a_1 < a_2 < s$

$\exists\, a_1, a_2 \in \mathbb{Z} : s - 1 < a_1 < a_2 < s$

$\Rightarrow 0 < \underbrace{a_2 - a_1}_{n_0 \in \mathbb{N}} \overset{*}{<} 1$ Άτοπο

» Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός μεταξύ του μηδενός και του ένα «

$(* \ a_2 - a_1 < s - (s-1) = 1)$

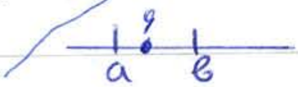
$\boxed{\text{Μάθημα 13ο} \quad 9\text{-}11\text{-}2012}$

(III) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $[x] \in \mathbb{Z}$ με
$[x] \leq x < [x]+1$ ($[x]$: το ακέραιο μέρος του x)

(IV) <u>Πυκνότητα του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$)</u>

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$

$a < b$



<u>Απόδειξη:</u> $b - a > 0$ Άρα από Αρχ. Ιδιότητα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:
$n_0(b-a) > 1$

Τότε $n_0 b > 1 + n_0 a \geq 1 + [n_0 a] > n_0 a$

$$\Rightarrow b > \frac{1+[n_0 a]}{n_0} > a$$

όπου $q = \frac{1+[n_0 a]}{n_0} \in \mathbb{Q}$ ($[n_0 a] \in \mathbb{Z}$, $[n_0 a]+1 \in \mathbb{Z}$ για $n_0 \in \mathbb{N}$)

(V) <u>Πυκνότητα του συνόλου $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ των αρρήτων στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ($\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$)</u>

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (άρρητος) με $a < x < b$

<u>Απόδειξη:</u>

Έχουμε αποδείξει ότι δεν υπάρχει ρητός $\frac{p}{q} > 0$ ώστε $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ (απόδειξη Ευδόξου)

Όμως υπάρχει $\gamma > 0$: $\gamma^2 = 2$, $\gamma = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (από την αξιω

Θα έχουμε $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Από το (IV) $\exists\, p' \in \mathbb{Q}$:
$p' \neq 0$

$\frac{a}{\sqrt{2}} < q' < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Τότε <u>$a < p'\sqrt{2} < b$</u>
όπου $p'\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(Χρησιμοποιώ το μέχρι στιγμής γνωστό $\sqrt{2}$)

Ασκήσεις (Σ/Λ)

Άσκηση 1

i) $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow x_1+x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

ii) $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

i) Σωστό : Έστω ότι $x_1 = \frac{p_1}{q_1} \in \mathbb{Q}$ και $x_1 + x_2 = \frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q}$

Τότε $x_2 = \frac{p'}{q'} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{\overbrace{p'q_1 - p_1 q'}^{\text{ακέραιοι ακέραια}}}{\underbrace{q' q_1}_{\in \mathbb{N}} = \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ Άτοπο

Άρα $x_1 + x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ κλειστές στις πράξεις

ii) Σωστό : Ίδιο μόνο που θα αντιστραφεί η κατάσταση.

Άσκηση 2

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow x_1+x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ~~τότε~~ $x_1 \cdot x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Λάθος πχ $x_1 = \sqrt{2}$ και οι δύο $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ άρρητοι

$x_2 = 1-\sqrt{2}$ και $x_1 + x_2 = 1 \in \mathbb{Q}$ ρητός

Επίσης αν $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$ τότε $x_1 x_2 = 2 \in \mathbb{Q}$

Οι άρρητοι <u>ΔΕΝ</u> είναι κλειστοί στις πράξεις

Ασκήσεις

1) Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$

Τότε για την $\sqrt{n}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής:

i) $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$

ii) $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Απόδειξη :

α' τρόπος : (Θεωρία Αριθμών : Θεωρία Gauss)

Πρόταση: Ύπαρξη Ακεραίου Μέρους $[x]$, $x\in\mathbb{R}$

Έστω $x\in\mathbb{R}$ (σταθεροποιήσαμε)

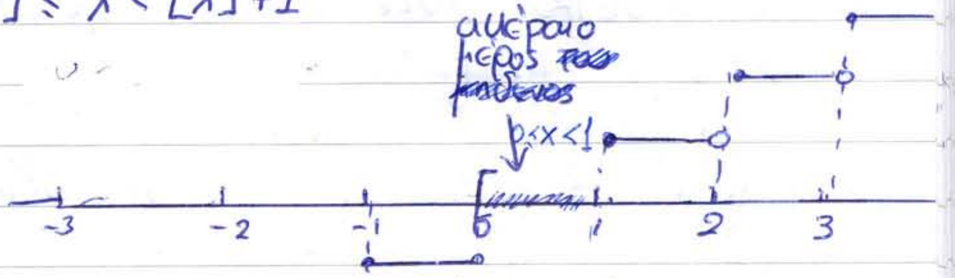
Τότε υπάρχει ακριβώς ένα ακέραιο μέρος $n_0\in\mathbb{Z}$ ώστε

$$n_0 \le x < n_0+1$$

$n_0 \overset{\Sigma\upsilon\mu\beta}{=} [x]$ δηλ $[x]\le x < [x]+1$

Γεωμετρικά:

Έχουμε χωρίσει το $\mathbb{R}$ σε διαστήματα.



Κλειστό από τη μία ανοιχτό από την άλλη, μήκους 1 δηλ $[n_0, n_0+1)$ $n_0\in\mathbb{Z}$

Απόδειξη:

Έστω $x\in\mathbb{R}$

$A=\{m\in\mathbb{Z} : m\le x\}$

- αν $x\ge 0$, $0\in A$
- αν $x<0$, $-x>0$, $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμ. $\Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{N} : n>-x \Rightarrow \exists\,(-n)\in\mathbb{Z} : (-n)<x$
- A άνω φραγμ. (x = άνω φράγμα του A)

* $A\neq\emptyset$

Άρα $\exists\ \sup A\in\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{Z} \xRightarrow{\text{Λήμμα}} \sup A = n_0\in A$
(Π14)

Τελικά $n_0\le x<n_0+1$
$n_0\in A$

Μοναδικότητα

Έστω ότι $\exists\, n_1, n_2\in\mathbb{Z} : n_1<x<n_1+1$
$n_2<x<n_2+1$ Εφόσον ανήκουν στους ακεραίους

άρα $n_1<n_2+1 \Rightarrow n_1\le n_2$
$n_2<n_1+1 \Rightarrow n_2\le n_1$ $\Big| \Rightarrow n_1=n_2$

β' τρόπος : Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ώστε $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλ $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ όπου $p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$ κ ο q ο πιο μικρός παρονομαστής (δηλ $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ $\Rightarrow q < q'$ κατά κάποιο τρόπο ανάγωγο) (II)

$p = \sqrt{n}\, q$, $p\sqrt{n} = nq$

Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$: $N < \sqrt{n} = \frac{p}{q} < N+1$ (εφόσον $n \neq N^2$)

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} = \frac{p(\overbrace{\sqrt{n}-N}^{>0})}{q\underbrace{(\sqrt{n}-N)}_{\in \mathbb{N}}{}_{>0}} = \frac{p\sqrt{n} - pN}{q\sqrt{n} - qN} = \frac{\overset{\in \mathbb{N}}{nq} - \overset{\in \mathbb{N}}{pN}}{p - qN}$$ Στοιχειώδης απόδειξη

$p_1 = nq - pN$

$q_1 = p - qN$ από $N < \sqrt{n} = \frac{p}{q} < N+1$

τότε $p - qN < q$

δηλ $\exists\, p_1, q_1 \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n} = \frac{p_1}{q_1}$ με $q_1 < q$ άτοπο από (II)

» Άρα αν $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ τότε $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

~~Υποθέσαμε ότι $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ αλλά $\notin \mathbb{Q}$~~

<u>Άσκηση 2</u> (**)

Έστω $n \geq 2$ (σταθερό) κ $x > 0$, $x \neq 1$. Τότε $\frac{n}{\sqrt[n]{x}} + x > n+1$ κ επίσης $\frac{n}{\sqrt[n]{x}} + x = n+1 \iff x = 1$

<u>Λύση</u>:

Έστω $y = \sqrt[n]{x} - 1 > -1$ και $y \neq 0$

Bernoulli : $(1+y)^{n+1} > 1 + (n+1)y$

$\Rightarrow \left(1 + (\sqrt[n]{x} - 1)\right)^{n+1} = (\sqrt[n]{x})^{n+1} = x^{\frac{n+1}{n}} = x\sqrt[n]{x} > 1 + (n+1)(\sqrt[n]{x} - 1)$
$= (n+1)\sqrt[n]{x} - n$

Άρα $n + x\sqrt[n]{x} > (n+1)\sqrt[n]{x}$

$\Rightarrow \frac{n}{\sqrt[n]{x}} + x > n+1$ (ω τη θυμόμαστε!!)

Λύσεις: Παναγόπουλος άλλη Μηγρεσάκης.

Ορισμός:

1) Έστω $A \neq \emptyset$, A = άνω φραγμένο. Εάν το $\sup A \in A$ τότε το $\sup A$ καλείται $\underline{\max A}$

2) Έστω $B \neq \emptyset$, B = κάτω φραγμένο. Εάν το $\inf B \in B$ τότε το $\inf B$ καλείται $\underline{\min B}$

Ασκήσεις

(Υπολογισμός sup, inf δεδομένων συνόλων)

Να βρεθούν τα sup, inf, το max, το min (αν υπάρχουν) των συνόλων

1) $A = [\sqrt{2}, \sqrt{17}] \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{όταν } [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} \\ (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \end{array}}$

$S = \sqrt{17}$. Αν $x \in A \Rightarrow x < \sqrt{17}$. Άρα $\sqrt{17}$ = άνω φράγμα

δεν είναι ρητός γι' αυτό όχι "="

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists\, q_\varepsilon \in A$: $\sqrt{17} - \varepsilon < q < \sqrt{17}$ από τη πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$) υπάρχει ρητός που βρίσκεται μέσα στο σύνολο.

Άρα (ε τυχαίο) $\sup A = \sqrt{17}$

$\inf A = \sqrt{2}$

Επειδή $\sqrt{17} \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\sup A \notin A$

άρα Δεν $\exists$ maximum.

ομοίως δεν υπάρχει minimum

2) $A = (\sqrt{13}, \sqrt{1423}] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\sup A = \sqrt{1423} = \max A$ γτ ανήκει στο σύνολο

$\inf A = \sqrt{13} \notin A$

$\sqrt{1423} = \max A \ (\sqrt{1423} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\sqrt{1423}$ = άνω φράγμα του A & ανήκει στο A

Αρα $\sup A = \max A = \sqrt{1423}$

>> Όταν ένα φράγμα ανήκει στο σύνολο τότε είναι το sup

Καταρχάς αν $x \in A \Rightarrow x > \sqrt{13} \Rightarrow \sqrt{13}$ κάτω φράγμα

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists\, x_\varepsilon \in A (\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$:

$\sqrt{13} < x_\varepsilon < \sqrt{13} + \varepsilon$ απο ($\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$)

Άρα το $\sqrt{13} = \inf A \notin A$ άρα δεν έχει minimum

Ασκηση 3

$A = [0, \sqrt{5}] \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$

$\sup A = \sqrt{5} \notin A$ άρα $\nexists$ max διοτι δεν είναι ρητος

$\inf A = 0$, $\min A = 0$ γτ το μηδέν ρητός

Ασκηση 4

$A = [0, \sqrt{5}] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$\sup A = \max A = \sqrt{5} \in A$

$\inf A = 0$ δεν έχει min γτ το μηδέν δεν είναι άρρητο

Ασκηση 5

$A = [\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}] \cap \mathbb{Q}$, p_1, p_2 = πρώτοι αρ. $0 < p_1 < p_2$

ή $\cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Άσκηση Σ/Λ

1) $\begin{cases} A \subseteq \mathbb{Q} \\ A \neq \emptyset \end{cases}$ φραγμένο. Τότε $\sup A$ ή $\inf A \in \mathbb{Q}$

Λάθος πχ

Θέμα Σεπτέμβρη

$A = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q} \quad A \subseteq \mathbb{Q}$

το $\inf A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sup A = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

ή $A = [\sqrt{5}, \sqrt{11}] \cap \mathbb{Q}$

(Μπορεί σύνολο ρητών sup = άρρητος αν ήταν σωστό δε θα ∃ άρρητοι. Γενικά $a, b \notin \mathbb{Q}$, $a < b$ (δηλ. ∅ κατοπτ. στη) θεωρούμε $A = (a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$)

$\sup A = b \notin \mathbb{Q}$

$\inf A = a \notin \mathbb{Q}$

2) $B \neq \emptyset$, $B \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ φραγμένο. Τότε το $\sup B$ ή $\inf B \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Λάθος πχ $B = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

· αν ήταν σωστό δε θα υπήρχαν ρητοί

Μάθημα 14ο 12-11-2012

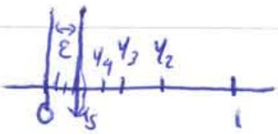
Ασκήσεις (.... συνέχεια) $\mathbb{N}=\{1,2,3\ldots\}$ (Στο εξής δε θα παίρνουμε το μη...

Να ευρεθούν τα sup, inf, max, min (αν $\exists$) των συνόλων

1) $A=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$

$\sup A = 1 \in A$, $\max A = 1$

$\inf A = 0 \notin A$, άρα δεν $\exists$ min



Απόδειξη: i) $\frac{1}{n}\in A$ τότε $\frac{1}{n}\leq 1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ 1: άνω φράγμα του A

$1=\frac{1}{1}\in A$, $1 = \sup A = \max A$ γτ ανήκει στο...

ii) Νδο το πιο μεγάλο από τα κάτω φράγματα είναι το μη...

$\frac{1}{n}\in A$ τότε $\frac{1}{n}>0$ Το 0 είναι κάτω φράγμα

Έστω $\varepsilon>0$ (Έπρεπε να βρούμε ένα στοιχείο του A που να είναι μικρότερο του ε)

$\exists\, n_0\in\mathbb{N} : \frac{1}{n_0}<\varepsilon$ (Αρχ. Ιδιότητα)

επειδή το ε μπορεί και να ... αν διώξαμε το μηδέν?

Άρα $\exists\, \frac{1}{n_0}\in A : \frac{1}{n_0}<\varepsilon$

$0=\inf A$ / $0\notin A$ δεν $\exists$ το minimum του A

2) $A=\{\frac{1}{2n} : n\in\mathbb{N}\}$

έχουμε ότι $A=\frac{1}{2}\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$

Από τη προηγούμενη άσκηση

$\sup A = \frac{1}{2}\sup\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\} \overset{1)}{=} \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}\in A = \max A$

$\inf A = \frac{1}{2}\inf\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$

3) $A=\left\{ \frac{1}{2n-1} : n\in\mathbb{N} \right\}$

$\sup A = 1 = \max A$

$\inf A = 0$ Δεν υπάρχει το $\min A$

Έστω ε>0 .... (Από Αρχιμήδεια Ιδιότητα)

4) Να βρεθεί το supremum των

$A=\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n\in\mathbb{N} \right\}$ Θα χωρίσουμε τα σύνολα σε μονά - ζυγά

Χρησιμοποιούμε $\sup(\Gamma+\Delta) = \sup\Gamma + \sup\Delta$ «

$A = \underbrace{\left\{ 1 + \frac{1}{2n} : n\in\mathbb{N} \right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{ -1 + \frac{1}{2n-1} : n\in\mathbb{N} \right\}}_{A_2}$

$\sup A_1 = 1 + \sup\left\{ \frac{1}{2n} : n\in\mathbb{N} \right\} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\sup(A_1 \cup A_2) = \max\{\sup A_1, \sup A_2\} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\sup A_2 =$ αρνητικό διότι όλα μικρότερα της μονάδας

Άρα $\sup A = \max A = 3/2$

$\inf(A_1 \cup A_2) = \min\{\inf A_1, \inf A_2\}$

$= \inf A_2 = -1 + \inf\left\{ \frac{1}{2n-1} : n\in\mathbb{N} \right\} = -1+0 = -1$

5) $A = \left\{ 5 + \frac{6}{n} : n\in\mathbb{N} \right\}$

$\sup A = \sup\left\{ 5 + \frac{6}{n} : n\in\mathbb{N} \right\} = 5 + 6\sup\left\{ \frac{1}{n} : n\in\mathbb{N} \right\} = 5+6\cdot 1 = \underline{11}$

$\shortparallel$

$\max A$ διότι για $n=1$ ανήκει στο A

$\inf A = 5 + 6\inf\left\{ \frac{1}{n} : n\in\mathbb{N} \right\} = 5 + 6\cdot 0 = 5$

Δεν $\exists$ minimum

(Ιδιότητες:

$\sup(\Gamma+\Delta) = \sup\Gamma + \sup\Delta$

$\sup(\varepsilon\Gamma) \overset{\varepsilon>0}{=} \varepsilon\sup\Gamma$)

6) $A = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ 0 < x^2 - 1 \leq 2 \} \subseteq \mathbb{Q}$

$A = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ 1 < x^2 \leq 3 \}$

$= \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ 1 < x \leq \sqrt{3} \}$

$= (1, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ όλοι οι ρητοι που είναι εδώ μέσα

Το $\sup A = \sqrt{3} \notin A$ γτ το $\sqrt{3}$ άρρητος

το $\inf A = 1 \notin A$ Το 1 δεν ανήκει γτ είναι γνήσια μεγαλύτερο του

7) $A = \{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \}$

$\sup A = \max = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ διότι το $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \leq \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\text{άνω φράγμα}:\ \frac{5}{6} \in A}$ $n, m \in \mathbb{N}$

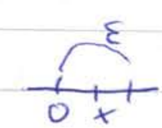
$\inf A = 0$ διότι για $\varepsilon > 0$ θα έχουμε

$0 < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$

↳ κάτω φράγμα $\leq \frac{1}{n}$

Από $2^k > k+1$ (πρώτες ασκήσεις επαγωγής)

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ Αρχ. Ιδιότητα γτ



Τότε $\underbrace{\frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{3^{n_0}}}_{\in A} < \varepsilon$

$\inf A = 0$

Δεν υπάρχει minimum γτ δε μηδενίζεται ποτέ

Ανισότητα των Cauchy - Schwarz

Έστω $a_1, a_2 \dots a_n \geq 0$ & $b_1, b_2 \dots b_n \geq 0$ $(n \geq 2)$

Τότε $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots b_n^2}$

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2 \dots y_n)$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + \dots x_n y_n$ (Εσωτερικό γινόμενο)

Ευκλείδια Νόρμα

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$ Τότε $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$?

Βάση αυτού ορίζουμε το συνημίτονο σε οποιοδήποτε χώρο εσωτερικού.

Λύση: Με επαγωγή. ο α' τρόπος

Έστω ότι έχουμε $x_1, x_2 \geq 0$, $y_1, y_2 \geq 0 \iff$

$0 \leq x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

$\iff (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$

$\iff 2 x_1 x_2 y_1 y_2 \leq x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2$

$\iff (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0$ Ισχύει. Άρα η ανισότητα C-S ισχύει για $n=2$

Έστω ότι ισχύει για $a_1, a_2 \dots a_n \geq 0$.

$b_1, b_2 \dots b_n \geq 0$.

$a_1 b_1 + \dots a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \dots b_n^2}$ ⊛

$a_{n+1}, b_{n+1} \geq 0$ $\quad a_1 b_1 + \dots a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} \leq \underbrace{\sqrt{a_1^2 + \dots a_n^2}}_{x_1}\underbrace{\sqrt{b_1^2 + \dots b_n^2}}_{y_1} + \underbrace{a_{n+1}}_{x_2}\underbrace{b_{n+1}}_{y_2}$

$\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ κάνουμε την αντικατάσταση

$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2 + a_{n+1}^2}\sqrt{b_1^2 + \dots b_n^2 + b_{n+1}^2}$

Άρα ισχύει για $n+1$. Από την Αρχή της Επαγωγής η ανισότητα των C.S. ισχύει $\forall n \geq 2$

β' τρόπος Συμβατικός που θα τη γράφαμε για μελλοντική χρήση.

$\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda\gamma-\delta)^2 \geq 0$, $\lambda^2\gamma^2 - 2\lambda\gamma\delta + \delta^2 \geq 0$

Αντικαθιστούμε το γ με a_i & το δ με b_i

Συνεπώς
$$\lambda^2 a_1^2 - 2\lambda a_1 b_1 + b_1^2$$
$$\lambda^2 a_2^2 - 2\lambda a_2 b_2 + b_2^2$$
$$\vdots$$
$$\underline{\lambda^2 a_n^2 - 2\lambda a_n b_n + b_n^2}$$
$$\lambda^2\underbrace{(a_1^2+\ldots+a_n^2)}_{\geq 0} - 2\lambda(a_1 b_1 + \ldots a_n b_n) + b_1^2 + \ldots b_n^2 \geq 0$$

→ Αυτό το συμπέρανα για τυχαίο $\lambda \in \mathbb{R}$

Η διακρίνουσα πρέπει να είναι ≤ 0 $\quad \Delta = \beta^2 - 4a\gamma$

$$\Delta = 4(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 - 4(a_1^2 + \ldots a_n^2)(b_1^2 + \ldots b_n^2) \leq 0$$

Άρα $a_1 b_1 + \ldots a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots b_n^2}$

Άσκηση Αριθμητικός - Γεωμετρικός Μέσος

$a_1, a_2, \ldots a_n > 0$ $(n \geq 2)$

Να αποδειχθεί ότι
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$
δηλαδή

Μέσος αριθμητικός $\geq$ Μέσος Γεωμετρικός

» Η ισότητα ισχύει αν & μόνο αν $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

α' τρόπος (Απόδειξη Γιαννόπουλου, e-class) ή (Νεγρεπόντης κά)

β' τρόπος (Ανισότητα Jensen για την γν. κοίλη συνάρτηση $\ln(x)$)

γ' τρόπος (Χρήση της ανισότητας Bernoulli, $x>0$, $x \neq 1$ τότε $x + \frac{\nu}{\sqrt[\nu]{x}} > \nu+1$, Ισότητα $\Leftrightarrow x=1$)

Με επαγωγή.

Για $n=2$ $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (a_1-a_2)^2 \geq 0$ Ισχύει

ως ισότης $a_1=a_2$

Έστω ότι ισχύει για ν $(\nu \geq 2)$

$\frac{a_1+a_2+\dots+a_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{a_1 \cdots a_\nu}$ ⊛ Με ισότητα άν και μόνο άν $a_1=a_2=\dots=a_\nu$

1η Περίπτωση.

Έστω ότι $x_1, x_2, \dots x_{\nu+1} > 0$ με $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\nu+1} = 1$

Τότε $x_1 \cdot x_2 \cdots x_\nu = \frac{1}{x_{\nu+1}}$

Απο Επαγωγική υπόθεση (⊛) $x_1+x_2+\dots+x_\nu \geq \nu\sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_\nu} = \frac{\nu}{\sqrt[\nu]{x_{\nu+1}}}$

Προσθέτουμε το ζητούμενο $x_{\nu+1}$

$x_1+x_2+\dots+x_\nu+x_{\nu+1} \geq \frac{\nu}{\sqrt[\nu]{x_{\nu+1}}} + x_{\nu+1} \geq \nu+1$

Ισότης εάν και μόνο αν $x_1=x_2=\dots=x_\nu=x_{\nu+1}=1$.

Άρα $\frac{x_1+x_2+\dots+x_{\nu+1}}{\nu+1} \geq 1 = \sqrt[\nu+1]{x_1 \cdots x_{\nu+1}}$

2η Περίπτωση

$a_1, a_2 \dots a_\nu, a_{\nu+1}$

Εάν πάρουμε $x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[\nu+1]{a_1 \cdots a_{\nu+1}}}$, $x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[\nu+1]{a_1 \cdots a_{\nu+1}}}$ ... $x_\nu = \frac{a_{\nu+1}}{\sqrt[\nu+1]{a_1 \cdots a_{\nu+1}}}$

$x_1 \cdot x_2 \cdots x_\nu \cdot x_{\nu+1} = 1$

Άρα από 1η Περίπτωση $\frac{x_1+x_2+\dots+x_{\nu+1}}{\nu+1} \geq 1 = \sqrt[\nu+1]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_{\nu+1}}$

Ισότης $\Leftrightarrow x_1=x_2=\dots x_{\nu+1}=1$

$\frac{a_1+a_2+\dots a_{\nu+1}}{\nu+1} \geq \sqrt[\nu+1]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\nu+1}}$ Ισότης $\Leftrightarrow$ $a_1=a_2=\dots a_{\nu+1}$

Σπίτι: Άσκηση

$a_1, a_2 \dots a_n > 0 \quad (n \geq 2)$

i) $\frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}}$

Μέσος αρμονικός

ii)

$(a_1 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$

Μάθημα 15ο (13-11-2012)

Τα "σύμβολα" "ανάμειξενα" $+\infty, -\infty$

$a \in \mathbb{R} \quad (+\infty) + a = +a + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$

$a > 0 \quad a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty$

$a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty$

$a < 0 \quad a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty$

$a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty$

Επίσης $(+\infty)(+\infty) = +\infty$ και $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$

Διάταξη

$-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$A \neq \emptyset$, A δεν είναι άνω φραγμένο

τότε $\sup A := +\infty$

$B \neq \emptyset$, B δεν είναι κάτω φραγμένο

$\inf B =: -\infty$

ΔΕΝ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ $(+\infty) + (-\infty)$

$0(+\infty), \; 0(-\infty), \; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Άρα δεν ορίζεται $0^0, 1^\infty, \infty^0$

Διαστήματα του $\mathbb{R}$ (δεν $\exists$ διάστημα στο $\mathbb{R}^2$)

Ορισμός $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ καλείται διάστημα $\Leftrightarrow$ για κάθε $a, b \in A$ με $a < b$ κ τυχαίο $x \in \mathbb{R}$ με $a < x < b$ έπεται ότι το $x \in A$

Τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τα εξής:

- $a < b$, ορίζουμε (a, b) το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ → Ανοικτό και
- $a < b$, ορίζουμε $[a, b)$ το σύνολο $= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (φραγμένο διαστή-
- $a < b$ ορίζουμε $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ -ματα.)

- $a \leq b$ ορίζουμε $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ / Κλειστό κ φραγμένο διάστημα → λεγόμενο Συμπαγές.

Διάστημα φραγμένο όταν μας ζητείται είναι κάποιο από αυτά.

Θεωρούμε $a \in \mathbb{R}$ $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ Ανοικτό όχι κάτω φραγμένο

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ Κλειστό όχι κάτω φραγμένο

Θεωρούμε $b \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε ως

$(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$ Ανοικτό όχι άνω φραγμένο

$[b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$ Κλειστό σύνολο όχι άνω φραγμένο

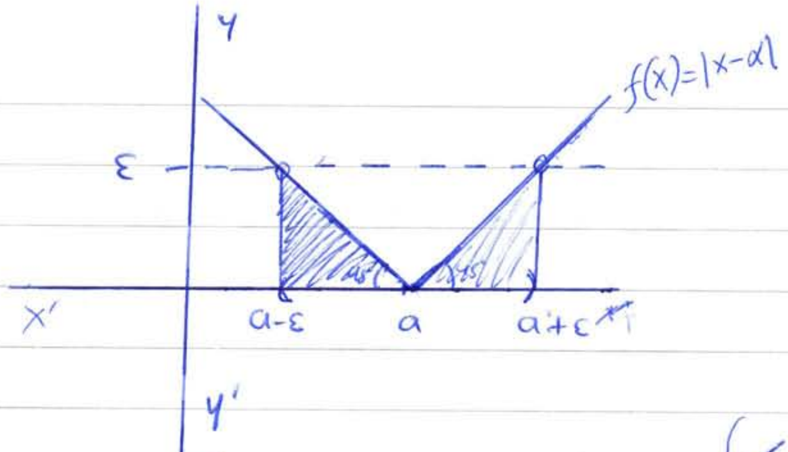
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$

Ιδιαιτέρως: Όλα τα x που η απόσταση τους είναι μικρότερη του ε

$a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ $= (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ανοιχτό διάστημα

$\left(|x - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\right)$



(↙ δίχως το μηδέν στο $\mathbb{N}$)

Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών

Μια απεικόνιση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ καλείται ακολουθία
Έχουμε ότι $a(1)=a_1$, $a(2)=a_2, \ldots, a(n)=a_n, \ldots$

Συμβολίζεται: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή $(a_1, a_2 \ldots)$
ή $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(a_n)_n$

Πώς δίνεται μια ακολουθία

Μπορεί να δοθεί με:

- Αναλυτικό Τύπο

πχ $a_n = \frac{1}{n}$ | $n\in\mathbb{N}$ | $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

$b_n = \sqrt[n]{n}$ | $(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3} \ldots)$

$\gamma_n = \frac{1}{2^n}$ | $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} \ldots)$

- Με κλάδους

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = \text{άρτιος} \\ -1, & n = \text{περιττός} \end{cases}$$

$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

$$b_n = \begin{cases} n & n = 1, 2 \ldots 10^{10} = n_0 \\ \frac{1}{n^2}, & n > n_0 = 10^{10} \end{cases}$$

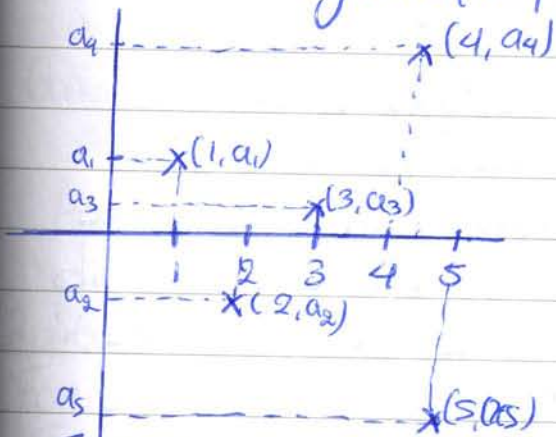
• Αναδρομικό τύπο

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ (Fibonaggi)

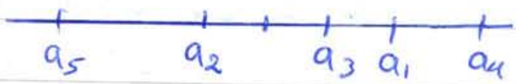
$b_{n+1} = \sqrt{b_n}$ $b_1 = 2$

Υπάρχουν και ακολουθίες που δεν έχουν τύπο, πχ των πρώτων αριθμών

⇒ Πώς θα βλέπαμε μια απεικόνιση



Δεν το απεικονίζαμε έτσι
αλλά το αναθοσβγορίζαμε
δηλ



Προσοχή

Το σύνολο τιμών, $a(\mathbb{N})$ είναι διαφορετικό από την ακολουθία $(a_1, a_2 \dots)$

πχ. Για την $a_n = \begin{cases} 1 & n = \text{άρτιος} \\ -1 & n = \text{περιττός} \end{cases}$

$a_n = (-1)^n$

$(a_n)_n = (\overset{a_1}{-1}, \overset{a_2}{+1}, \overset{a_3}{-1}, \overset{a_4}{+1}, \dots)$

ενώ $a(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$ ⇝ του a των $\mathbb{N}$

Άλλο το σύνολο τιμών άλλο η ακολουθία

Ίσες ακολουθίες

$(a_n)_n$, $(b_n)_n$ είναι ίσες ⇔ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ..., $a_n = b_n$, ...

(ΔΕΝ ΘΑ ΠΕΤΥΧΟΥΜΕ ΤΕΤΟΙΕΣ)

Τελικά ίσες ακολουθίες ~~[illegible]~~ !!

Θεωρούμε δυο ακολουθίες $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ ότι είναι τελικά ίσες $\Leftrightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} : a_n = b_n \quad n \geq N_0 \; (n \in \{N_0, N_0+1, \ldots\})$

πχ

- $b_n = \begin{cases} n & n \leq 10^{10^{10}} \\ \frac{1}{n^2} & n > 10^{10^{10}} \end{cases}$

- $a_n = \frac{1}{n^2}$

$(a_n)(b_n)$ είναι τελικά ίσες

Δε μας απασχολεί η αρχή αλλά το τελικό κομμάτι. δηλ ότι από ένα N_0 κ πέρα ταυτίζονται

Η συμπεριφορά της ακολουθίας χαρακτηρίζεται από το τελικό της μέρος. Δε μας απασχολεί πόσο μεγάλο είναι το πρώτο μέρος (πόσοι πολλοί όροι) αλλά μας ενδιαφέρει το τελικό κομμάτι.

Σύγκλιση ακολουθίας

Θεωρούμε ακολουθία $(a_n)_n$, $a \in \mathbb{R}$

Η $(a_n)_n$ συγκλίνει στο a $\Longleftrightarrow$

για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 (= n_0(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ (- εξαρτάται από το ε -) ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ για $n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 (= n_0(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ για $n \geq n_0$

$-\varepsilon \quad a=0 \quad +\varepsilon$

Άρνηση του ορισμού

Η $(a_n)_n$ δεν συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \geq n : |a_{k_n} - a| \geq \varepsilon_0$

Μοναδικότητα του ορίου

Έστω $(a_n)_n$ $a,b \in \mathbb{R}$ με (a_n) συγκλίνει στο a και (a_n) συγκλίνει στο b

Τότε $a=b$

Απόδειξη: Παίρνουμε $\varepsilon>0$ και $(a_n)_n$ συγκλίνει στο a

$\exists\, n_1\in\mathbb{N}: |a_n-a|<\varepsilon \quad n\geq n_1$

$\exists\, n_2\in\mathbb{N}: |a_n-b|<\varepsilon \quad n\geq n_2$

Θα πάρουμε $0\leq|a-b|\leq|a-a_n|+|a_n-b|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

για $n\geq\max\{n_1,n_2\}$

Άρα $\forall\,\varepsilon>0$ $\quad 0\leq \frac{|a-b|}{2}<\varepsilon$

$\Rightarrow |a-b|=0$, $a=b$

Συμβολισμός:

Έστω $(a_n)_n$ συγκλίνει στο a

Το $a=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ καλείται όριο της $(a_n)_n$

ή $a_n \xrightarrow[n]{} a$ ή $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ ή $\text{ορ}(a_n)=a$

ή $a_n\to a$

Ασκήσεις

($\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$)

1) Να αποδείξουμε ότι το $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

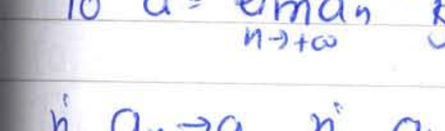
Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists\, n_0\in\mathbb{N}: n_0>\frac{1}{\varepsilon}$ Από Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Για $n\geq n_0$ το $0<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$

Άρα $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ $n\geq n_0$

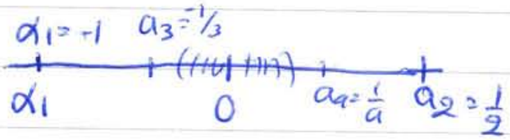
Συνεπώς $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

Όσο μικρότερο το ε τόσο μεγαλύτερο το n_0



Όσο και να μικραίνουμε το διάστημα το τελικό μέρος της ακολουθίας θα βρίσκεται μέσα στο διάστημα αρκεί βέβαια να έχουμε πεπερασμένο πλήθος εκτός.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$



Πράγματι $\varepsilon>0$, $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ για n

διότι $|(-1)^n| = 1$

3) $a_n = c$ $n=1,2\ldots$

$\lim\limits_{n} a_n = c$

Πράγματι $\forall \varepsilon>0$ Τότε $|a_n - c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$

για κάθε $n \geq (n_0=)\,1$

4) $\lim a_n = a \Rightarrow \lim (a_n + c) = a + c$ ⇝ Σπίτι

5) $a_n = (-1)^n$ $n\in\mathbb{N}$ ⊛ Δεν συγκλίνει

Έστω ότι η $a_n \xrightarrow{\text{συγκλίνει}} a\in\mathbb{R}$

Θεωρούμε ότι $\varepsilon>0$ $\exists\, n_0$ $|a_n - a|<\varepsilon$ για $n\geq n_0$

$2n_0 > n_0$ $|a_{2n_0} - a| < \varepsilon$, $|1-a| < \varepsilon$

το $2n_0+1 > n_0$ $|a_{2n_0+1} - a| < \varepsilon$, $|-1-a| = |1+a| < \varepsilon$

Δηλαδή για $\forall \varepsilon>0$ $|1-a|<\varepsilon$, $|1+a|<\varepsilon$ $\not\Rightarrow$ Αδύνατο!!!

Επομένως $a=1$, $a=-1$

<u>Ασκήσεις - Προτάσεις</u>

1) $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ και $\lim\limits_{n} a_n = a$

Έστω ότι οι $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ είναι <u>τελικά ίσες</u>

Τότε το $\lim\limits_{n} b_n = a$

Απόδειξη:

• $\varepsilon > 0$

$a_n \to a$ τοτε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon$ (1) για $n \geq n_0$

αφου είναι τελικα ίσες $\exists\, N_0 \in \mathbb{N} : a_n = b_n,\ n \geq N_0$ (2)

Για $n \geq \text{maximum}\{n_0, N_0\} \in \mathbb{N}$

(2) $\to$ (1) $|b_n - a| < \varepsilon$ Αρα $b_n \to a$

πχ 1 $b_n = \begin{cases} n, & n \leq 100^{100^{100}} \\ \frac{1}{n}, & n > 100^{100^{100}} \end{cases}$ Τελικά ίση με την $a_n = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$

Αρα $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

πχ 2 $\gamma_n = \begin{cases} n^{n^n}, & n \leq 10^{1423} \\ \sqrt{2}, & n > 10^{1423} \end{cases}$ Τελικα είναι σταθερή

(ας έχει ό,τι θέλει στην αρχή)

$\lim \gamma_n = \sqrt{2}$

<u>Ασκηση / Προταση 2</u>

$(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ $a_n \to a$ $\to$ Σπίτι

Τότε και η $(a_2 a_3 \ldots)$, $a_{n+1} \to a$

Γενικώς $k \geq 1$ (σταθερό) $(a_{k+1}, a_{k+2} \ldots)$ $a_{n+k} \xrightarrow[n]{} a$

<u>Ασκηση</u> Σοσάρα

$\lim_n a_n = 0$

1) $A_1 = \{n \in \mathbb{N} : -0{,}01 < a_n < 0{,}01\} \rightsquigarrow$ β) ?

2) $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0{,}01\} \rightsquigarrow$ α)

3) $A_3 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq -0{,}0001\} \rightsquigarrow$ α)

4) $A_4 = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 0\}$ * $\rightsquigarrow$ γ)

<u>$B \subseteq \mathbb{R}$</u> πεπερασμένο σύνολο $\Rightarrow$ αν $B \neq \emptyset$ ή $B = \{x_1, x_2 \ldots x_k\}$

Μπορούμε να μετρήσουμε τα στοιχεία του συνόλου

* πχ. το $\frac{1}{n}$ δεν ισχυει το α), για το $-\frac{1}{n}$ δεν ισχυει το β)

Εξετάστε για κάθε ένα από τα A_1, A_2, A_3, A_4 ποιός ισχυρισμός είναι αληθής.

α) το A_i πεπερασμένο

β) το $\mathbb{N}-A_i$ είναι πεπερασμένο σύνολο

γ) τα δεδομένα δεν είναι αρκετά για να προκύψει το α) ή το β)

Μάθημα 16 (19/11/2012)

Αν πάρουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, κ' $a\in\mathbb{R}$ θα λέμε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0(=n_0(\varepsilon))\in\mathbb{N}:$ $|a_n-a|<\varepsilon\quad \forall n\geq n_0$

Μέσα σ'αυτή τη λωρίδα βρίσκονται όλα τα κόκκινα
• Μερικά ενδέχεται να βρίσκονται απ'έξω, αλλά πεπερασμένο πλήθος

2) Θεωρούμε $(a_n)_n$ φραγμένη $\iff a(\mathbb{N})\subseteq\mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο
δηλ το πεδίο τιμών είναι φραγμένο σύνολο
$\iff \exists\, \mu, M\in\mathbb{R}: \mu\leq a_n\leq M \quad n\in\mathbb{N}$

I Αρχικές ~~ακολουθίες~~ ιδιότητες ακολουθιών

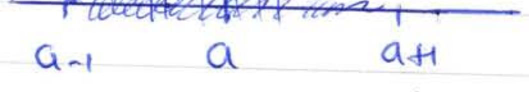
1. Πρόταση

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη ακολουθία.
Το αντίστροφο δεν ισχύει (γενικά)

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα
$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$

Παίρνουμε ότι $\varepsilon=1$ (κτ θετικό) τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}: |a_n-a|<1 \quad n>n_0$

Άρα για $n>n_0$ $\quad a-1<a_n<a+1$



Πρέπει να περιλαμβάνει κ αυτούς που $\exists$ πιθανόν απ'έξω (π.χ. μπορεί $a_1, a_2 \notin (a-1,a+1)$)