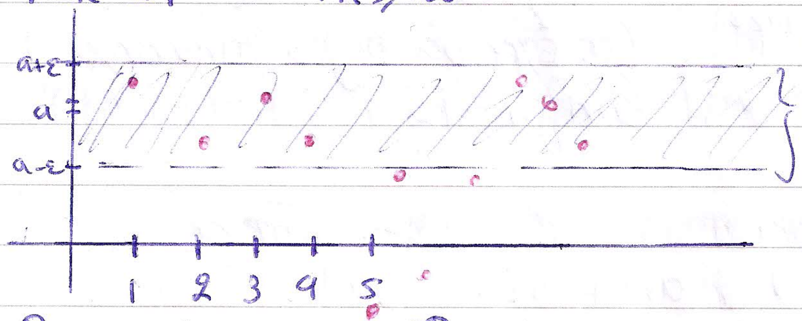
Μάθημα 16 (19/11/2012)

Αν πάρουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $a\in\mathbb{R}$ θα λέμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 (=n_0(\varepsilon))\in\mathbb{N}:$
$|a_n-a|<\varepsilon \quad \forall n\geq n_0$



Μέσα σ' αυτή τη λωρίδα βρίσκονται όλα τα κόκκινα
• Μερικά ενδέχεται να βρίσκονται απ' έξω, αλλά πεπερασμένο πλήθος

2) Θεωρούμε $(a_n)_n$ φραγμένη $\iff a(\mathbb{N})\subseteq\mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο
δηλ. το πεδίο τιμών είναι φραγμένο σύνολο
$\iff \exists \mu, M\in\mathbb{R}: \mu\leq a_n\leq M \quad n\in\mathbb{N}$

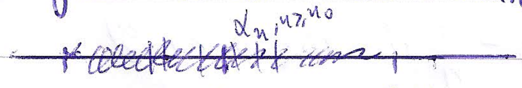
(I) Αρχικές ιδιότητες ακολουθιών

1. Πρόταση

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη ακολουθία.
Το αντίστροφο δεν ισχύει (γενικά)

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

Παίρνουμε ότι $\varepsilon=1$ (ςτ θετικό) τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}: |a_n-a|<1 \quad n>n_0$
Άρα για $n>n_0$ $\quad a-1<a_n<a+1$



Πρέπει να περιλαμβάνεις και αυτούς που $\exists$ πιθανόν απ' έξω (π.χ. μπορεί $a_1, a_2 \notin (a-1,a+1)$)

Για να βάλουμε την ακολουθία μεταξύ μ, M θέτουμε
$\mu = \min\{a_1, a_2 \dots a_{n_0}, a-1\}$
$M = \max\{a_1, a_2 \dots a_{n_0}, a+1\}$

(Στάνταρ Θέμα !!!)

Τότε $a-1 < a_n < a+1$ για $n > n_0$
$\min\{a_i \dots a_{n_0}\} \leq a_i \leq \max\{a_1 \dots a_{n_0}\}$ $i = 2 \dots n_0$
Άρα $\mu \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

ή) Από $|a_n| < 1 + |a|$ $n > n_0$ / $|a_n| \leq M'$ $n \in \mathbb{N}$
$M' = (1+|a|) + |a_1| + \dots |a_{n_0}|$

Το αντίστροφο δεν ισχύει
Π.χ. $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει ενώ $a(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$, $|a_n| \leq 1$ $n \in \mathbb{N}$ φραγμένη ακολ.

2. Σχέση σύγκλισης ακολουθίας με την σύγκλιση της ακολουθίας των απολύτων τιμών της

Πρόταση
(a_n), $a \in \mathbb{R}$

i) $\lim\limits_n a_n = a \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \lim (a_n - a) = 0 \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_n |a_n - a| = 0$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$
$\not\Longleftarrow$ (σελ 90)

Εάν αυτό δεν ισχύει (γενικά) το αντίστροφο
Π.χ. $a_n = (-1)^n$ η απόλυτη τιμή συγκλίνει στο 1
ενώ η ακολουθία πουθενά

Απόδειξη:

i) Έστω ε>0 τότε
το $|a_n - a| = ||a_n - a||$

(1) ($\Longrightarrow$) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $|\overbrace{(a_n-a)}-0| = |a_n - a| < \varepsilon$ $n \geq n_0$
Άρα $\exists$ το $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - a) = 0$

(2) ($\Longleftarrow$) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $||a_n - a|| = |a_n - a| < \varepsilon$ $n \geq n_0$

ii) Στο i) θέτουμε $a=0$ / $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim|a_n| = 0$

iii) $\left.\begin{array}{l} |a_n - a| < \varepsilon \quad n \geq n_0 \\ ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \end{array}\right\}$ άρα $||a_n| - |a|| < \varepsilon$ για $n \geq n_0$
Άρα $\lim|a_n| = |a|$

» Για το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο:
$a_n = (-1)^n$, $|a_n| \to 1$ ενώ η $(-1)^n$ δεν συγκλίνει
όπως αποδείξαμε στη σελ. 76.

3. Ακολουθίες με $\lim\limits_{n} a_n = a \neq 0$

Πρόταση

i) Έστω ότι το $\lim a_n = a > 0$
Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$ για $n \geq n_0$.

Ιδιαιτέρως η $(a_n)_n$ είναι τελικά ακολουθία θετικών αριθμών

ii) Εάν $\lim b_n = b < 0$ τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{3b}{2} < b_n < \frac{b}{2}$ $n \geq n_0$

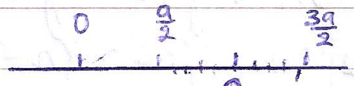
Ιδιαιτέρως η $(b_n)_n$ είναι τελικά ακολουθία αρνητικών αριθμών

iii) Εάν $a_n \geq 0$ $n\in\mathbb{N}$ και $\lim a_n = a$ τότε $a \geq 0$
→ Να δοθεί ακολουθία με $a_n > 0$, $\lim a_n = 0$

iv) Εάν έχουμε φραγμ. ακολουθία με $\mu \leq a_n \leq M$ $n\in\mathbb{N}$ και $\lim a_n = a$ τότε $\mu \leq a \leq M$ (το όριο πέφτει μέσα εκεί)

Απόδειξη:

i) Για $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$



$\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $\frac{a}{2} = a-\varepsilon < a_n < \varepsilon + a = \frac{3a}{2}$ για $n \geq n_0$

Τότε $n \geq n_0$ $a_n > \frac{a}{2} > 0$

ii) Για $\varepsilon = -\frac{a}{2}$ ......

iii) Εάν $a < 0 \xRightarrow{ii)} a_n < 0$, $n \geq n_0$ Άτοπο!

π.χ. a_n με όρους θετικούς & $\lim a_n = 0$

άρα $a_n = \frac{1}{n} > 0$ & $\lim_n a_n = 0$

iv) $a_n \leq M$ $n\in\mathbb{N} \Rightarrow a_n - M \leq 0$ $n\in\mathbb{N}$

$\xRightarrow{i)} \lim_n (a_n - M) = a - M \leq 0 \Rightarrow a \leq M$

$a_n \geq \mu$ $\mu\in\mathbb{N} \Rightarrow a_n - \mu \geq 0 \Rightarrow (\dots\dots)\ a \geq \mu$

4. (Μηδενική ακολουθία) x (Φραγμένη ακολουθία) είναι μηδενική

Πρόταση: Έστω $\lim_n a_n = 0$, $|b_n| < M$ $n\in\mathbb{N}$.

Για $\varepsilon > 0$ $\lim a_n = 0$. $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $|a_n - a| = |a_n| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}$ $n \geq n_0$

Τότε $|a_n b_n - 0| = |b_n||a_n| < M\cdot\varepsilon_1 = \varepsilon$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$

5) Κριτήριο Παρεμβολής / Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες

Πρόταση: $(a_n), (b_n), (\gamma_n)$ $\quad a_n \leq \gamma_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$

Εάν $\lim a_n = \lim b_n = \gamma \in \mathbb{R}$

τότε $\exists \lim_n \gamma_n = \gamma$

Απόδειξη:

$\exists n_1 : \gamma - \varepsilon < a_n < \gamma + \varepsilon$ για $n \geq n_1$

$\exists n_2 : \gamma - \varepsilon < b_n < \gamma + \varepsilon$ για $n \geq n_2$

Για $n \geq \max\{n_1, n_2\} = n_0$ $\quad \gamma - \varepsilon < \gamma_n < \gamma + \varepsilon$

Άρα $\exists \lim \gamma_n = \gamma$

II) Άλγεβρα ορίων

- $(a_n)_n, (b_n)_n$ ως το άθροισμα των ακολουθιών ορίζεται η $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε το $t(a_n)_n = (t a_n)_n$
- $(a_n), (b_n)$ ως το γινόμενο των ακολουθιών ορίζεται η $(a_n b_n)_n$

Πρόταση

1) $(a_n)_n, (b_n)_n$, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ τότε

$\exists \lim_n (a_n + b_n) = a + b \left(= \lim_n a_n + \lim_n b_n\right)$

2) $t \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_n a_n = a$ τότε $\exists \lim_n t a_n = t \lim_n a_n = ta$

3) $(a_n)_n, (b_n)_n$ $\quad \lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ τότε

$\exists \lim_n a_n b_n = a \cdot b = \lim a_n \lim b_n$

Απόδειξη: 1) Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad n \geq n_1$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad n \geq n_2$

Τότε $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon$ για $n \geq n_0 = \max\{n_1, \ldots$

Άρα $\exists \lim (a_n + b_n) = a + b$

2) $t=0$, $ta_n=0$ $\quad \lim ta_n = \lim 0 = 0 = a\theta$.
$t\neq 0$, $\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ $|a_n-a|<\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|t|}$ $\quad n\geq n_0$
Τοτε $|ta_n - ta| = |t||a_n-a| < |t|\varepsilon_1 = \varepsilon$ $\quad n\geq n_0$
Αρα $\exists \lim\limits_n ta_n = ta$

3) $\varepsilon>0$ $\exists n_1\in\mathbb{N}$: $|a_n-a|<\varepsilon_1$, $n\geq n_1$ $\quad \left(\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|b|+M} > 0\right)$
$\exists n_2 \in\mathbb{N}$: $|b_n-b| < \varepsilon_1$, $n\geq n_2$
$|a_nb_n - ab| = |a_n(b_n-b) + b(a_n-a)| \leq |a_n||b_n-b| + |b||a_n-a|$
$< M\varepsilon_1 + |b|\varepsilon_1 = \varepsilon$ $\quad n\geq \max\{n_1,n_2\}$
επειδη η a_n ειναι φραγμενη
οπου $|a_n|<M$ $n\in\mathbb{N}$

<u>Επι-ωφέλεον ιδιοτητες (Αλ-γε-βρι-κές)</u>
1) $b_n\to b$ $\quad b\neq 0$ Τοτε $\exists \lim\limits_n \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$
<u>Αποδειξη:</u>
$\varepsilon>0$ $\exists n_0$: $|b_n-b|<\varepsilon_1$ $\quad n\geq n_0$ $\quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2|b|^2} > 0$
$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n||b|}$ $\quad$ Αρα $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n-b|}{|b_n||b|} < \frac{2\varepsilon_1}{|b|^2} = \varepsilon$ $\quad n\geq \max\{n_0,n_1\}$
Ομως $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ για $n\geq n_1$ $\quad$ γτ $b_n\to b \Rightarrow |b_n|\to|b|>0$
αρα $\frac{|b|}{2} < |b_n| < \frac{3|b|}{2}$ $\quad n\geq n_1$

Μάθημα 17 20-11-2012

(II) Άλγεβρα των ορίων (Συνέχεια)

Επιπλέον ιδιότητες

1) $b_n \xrightarrow[n]{} b$, $b \neq 0$. Τότε $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

2) $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b \neq 0$ Τότε $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Δύναμη, Ρίζα ορίων

3) $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ Σταθερό

Εάν $(a_n)_n$, $a \in \mathbb{R}$ με $\lim a_n = a$

τότε $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n^k = a^k$ (Το k σταθερό δε τρέχει, ενώ το n τρέχει)

Απόδειξη: Εφόσον πρέπει να ισχύει για τυχαίο φυσικό

τότε Μαθηματική Επαγωγή!!!

Για $k=2$ έχουμε $\left.\begin{matrix}\lim a_n = a \\ \lim a_n = a\end{matrix}\right\} \lim a_n^2 = a^2$ Ισχύει γινόμενο ακολουθιών

Έστω ότι ισχύει για ν $(\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2)$

δηλ. $\lim_n a_n^\nu = a^\nu$. Έχουμε ότι $\lim_n a_n = a$

άρα $\lim_n a_n^{\nu+1} = a^{\nu+1}$ (από Γινόμενο Ακολουθιών)

Επομένως ισχύει για $(\nu+1)$

Άρα από την Αρχή της Επαγωγής ισχύει για τυχαίο $k \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$

Το k δε τρέχει με το όριο.

4) a_n, $a \geq 0$ $\lim_n a_n = a$
$k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ Σταθερό.
Τότε το $\lim_n \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

(Όχι επαγωγή, γιατί π.χ. $\sqrt[2]{\ }$ με $\sqrt[3]{\ }$ δεν συνδέονται ή $\sqrt[155]{\ }$ με τη $\sqrt[156]{\ }$)

(→ το όριο περνάει μέσα)

Απόδειξη:

Πως θα συνδέσουμε το $\lim_n a_n = a$ με το $\lim_n \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$???

Παίρνουμε $(\gamma^{\nu}-\delta^{\nu})=(\gamma-\delta)(\gamma^{\nu-1}+\gamma^{\nu-2}\delta+\dots\gamma\delta^{\nu-2}+\delta^{\nu-1})$

Για $\gamma=\sqrt[k]{a_n}$, $\delta=\sqrt[k]{a}$ με $a>0$ και $\nu=k$

τότε

$(a_n-a)=(\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a})(\underbrace{a_n^{\frac{k-1}{k}}}_{\geq 0}+\dots+\underbrace{a^{\frac{k-1}{k}}}_{>0})$

Συνεπώς

$\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}=\dfrac{|a_n-a|}{a_n^{\frac{k-1}{k}}+\dots a^{\frac{k-1}{k}}} \leq \dfrac{|a_n-a|}{a^{\frac{k-1}{k}}}$ (1) για να δείξουμε ότι → τείνει στο μηδέν όταν $n\to+\infty$ → πετάμε τους όρους με το n (δηλ. που γίνονται)

Έστω $\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $|a_n-a|<\varepsilon a^{\frac{k-1}{k}}=\varepsilon_1$ για $n\geq n_0$ (2)

Από (1),(2) $|\sqrt[k]{a_n}-\sqrt[k]{a}|<\varepsilon$ $n\geq n_0$ >> Το ε το χρησιμοποιούμε για μικρά

Άρα $\lim_n \sqrt[k]{a_n}=\sqrt[k]{a}$

• Για $a=0$ / $\varepsilon>0$ $|a_n-0|=|a_n|<\varepsilon_1=\varepsilon^k$ για $n\geq n_0$

Τότε $|\sqrt[k]{a_n}-0|=|\sqrt[k]{a_n}|<\sqrt[k]{\varepsilon_1}=\varepsilon$, $n\geq n_0$.

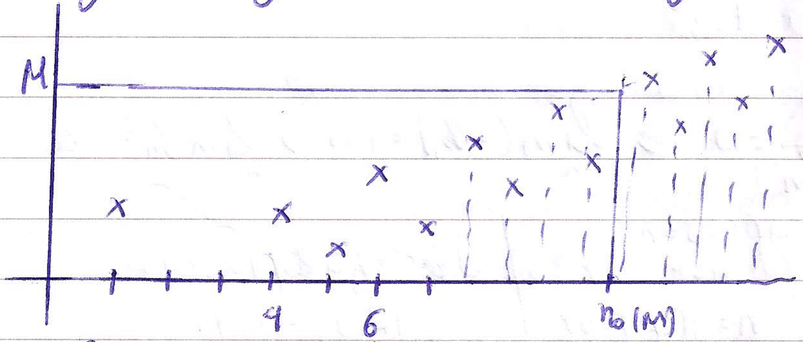
— X —

Ορισμοί: $\lim a_n=+\infty$ ή $-\infty$

Λέμε ότι $\lim_n a_n=+\infty \overset{\text{ορισμός}}{\iff} \forall M>0\ \exists n_0(=n_0(M))\in\mathbb{N}$

$a_n>M$ για $\forall n\geq n_0$

(δηλ. το τελικό μέρος της ακολουθίας είναι μεγαλύτερο του M)



• $\lim b_n=-\infty \overset{\text{ορισμ.}}{\iff} \forall M>0\ \exists n_0(=n_0(M))\in\mathbb{N}$

$b_n<-M$ για κάθε $n\geq n_0 \iff \lim_n(-b_n)=+\infty$

$-b_n>M$

Ιδιότητες (+), (·) ορίων ανάλογες με τα άλλα όρια, εφόσον οι πράξεις είναι επιτρεπτές.

Άσκηση

i) $\lim a_n = +\infty \ (-\infty) \Longrightarrow \lim\limits_n \frac{1}{a_n} = 0$

ii) $a_n > 0 \ n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_n \frac{1}{a_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_n a_n = +\infty$

iii) $b_n < 0 \ n \in \mathbb{N}$ και $\lim \frac{1}{b_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_n b_n = -\infty$

iv) Να δοθεί παράδειγμα όπου $\lim\limits_n \frac{1}{\gamma_n} = 0$ ($\gamma_n \neq 0 \ n \in \mathbb{N}$) και γ_n δε συγκλίνει στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$

Λύση: i) Έστω $\varepsilon > 0$, $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n > M = \frac{1}{\varepsilon}$ για $n \geq n_0$

Άρα $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ για $n \geq n_0$

Επομένως $\lim\limits_n \frac{1}{a_n} = 0$

ii) $M > 0$

$\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, επειδή αυτή τείνει στο μηδέν $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| \overset{a_n > 0}{=} \frac{1}{a_n} < \varepsilon = \frac{1}{M}$ για $n \geq n_0$

Άρα ($a_n > 0$, $M > 0$) $a_n > M$ για $n \geq n_0$

Επομένως το $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

iii) $-b_n > 0$. ι $\lim\limits_n \frac{1}{b_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_n (-b_n) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_n b_n = -\infty$

iv) $\gamma_n = (-1)^n n = \begin{cases} +n & \text{άρτιος} = n \\ -n & n = \text{περιττός} \end{cases}$ | δεν έχει όριο στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

ενώ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

Το Θεώρημα Μονότονης Ακολουθίας **

Ορισμό $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

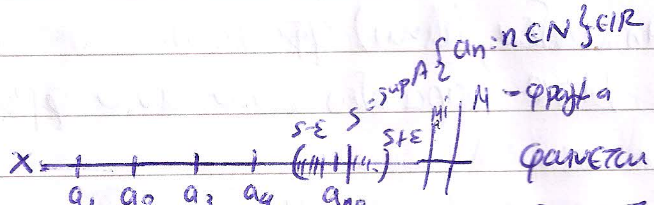
1) $(a_n)_n$ αύξουσα (γν. αύξουσα) ακολουθία $\overset{ορισ}{\iff} a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$ $n\in\mathbb{N}$

2) $(b_n)_n$ φθίνουσα (γν. φθίνουσα) ακολουθία $\overset{ορισ}{\iff} b_{n+1} \leq b_n$ $(b_{n+1} < b_n)$ $n\in\mathbb{N}$

Θεώρημα

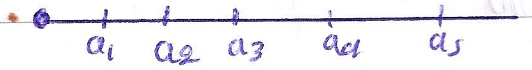
(A) $(a_n)_n$ Αύξουσα

i) Εάν η $(a_n)_n$ φραγμένη τότε υπάρχει το όριο της $(a_n)_n$. δηλ. $\lim_n a_n = \sup\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$

i) 

φαίνεται να συγκλίνει προς το sup

ii) Εάν η (a_n) δεν είναι (άνω) φραγμένη, τότε το $\lim_n a_n = +\infty$



(B) Έστω $(b_n)_n$ φθίνουσα

i) Εάν η $(b_n)_n$ είναι κάτω φραγμένη τότε υπάρχει το όριο της $(b_n)_n$ $\lim_n b_n = \inf\{b_n, n\in\mathbb{N}\}$

ii) Εάν η (b_n) δεν είναι (κάτω) φραγμένη τότε $\lim_n b_n = -\infty$

Απόδειξη (A)

i) $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι μη κενό, άνω φραγμένο — Sosάsι

Άρα από (ΠΤα) $\exists$ $s=\sup A = \sup\{a_n ; n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon>0$ (Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει η γνωστή σχέση / να "ρίξουμε" την ακολουθία μέσα στο $s-\varepsilon$, $s+\varepsilon$)

Τότε $s-\varepsilon<s$ δεν είναι άνω φράγμα της $(a_n)_n$

άρα $\exists$ a_{n_0} : $s-\varepsilon < a_{n_0} \leq s$ (1) Βρήκαμε ένα, θέλουμε όλους να δείξουμε ότι η ακολουθία βρίσκεται εκεί μέσα

Η (a_n) είναι αύξουσα άρα $a_n \geq a_{n_0}$ για $n \geq n_0$ (2)
Συνεπώς από (1),(2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $s-\varepsilon < a_n \leq s < s+\varepsilon$ για $n \geq n_0$
Επομένως $s-\varepsilon < a_n < s+\varepsilon$, $n \geq n_0$
Άρα $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = s$

ii) Η $(a_n)_n$ δεν (άνω) φραγμένη.
Έστω $M>0$ (άρα δεν είναι άνω φραγμένη) Τότε $\exists a_{n_0}$: $a_{n_0} > M$

Για $n \geq n_0$ $a_n \geq a_{n_0} > M$ (επειδή αύξουσα)
Άρα $\lim_n a_n = +\infty$

Ορισμός του e
$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Τότε η (a_n) είναι γνήσια αύξουσα
(b_n) είναι γνήσια φθίνουσα Ισχύει $2 < a_n < b_n < 3$ για $n \geq 5$

ii) Υπάρχει το $\lim_n a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \inf\{b_n : n\in\mathbb{N}\} = \lim_n b_n$
Το $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: e \in \mathbb{R}$ $2 < e < 3$

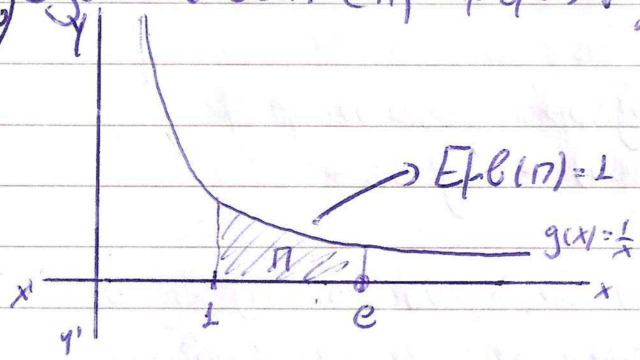
i) Βλέπε Άσκηση 5, Μάθημα 7 σελίδα 27
ii) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ γνησ. αύξουσα & άνω φραγμένη
$\Rightarrow \exists \lim_n a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$
$e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$

→ φθίνουσα & κάτω φραγμένη
$b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\lim b_n = \inf\{b_n : n\in\mathbb{N}\} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
Επειδή φθίνουσα το $\inf < 3 \Rightarrow e < 3$

Σημείωση $e \notin \mathbb{Q}$ (Αποδ: Θ Taylor για την $f(x) = e^x$)

Άλλοι ορισμοί του e : 1) $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$

2) Εκείνος ο $e \in \mathbb{R}$ (πρ. αριθμός): $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$



Όταν γίνει 1 τότε ο αριθμός θα είναι το e

Ασκήσεις Σωστού / Λάθους

1) a_n φραγμένη ακολουθία. Τότε η (a_n) συγκλίνει

Λάθος πχ $a_n = (-1)^n$

2) $(a_n)_n$ συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$. Τότε η $(a_n)_n$ είναι φραγμένη

Σωστό (την έχουμε αποδείξει στη σελίδα 78-79)

3) $a_n \to a$ (b_n) φραγμένη $\Rightarrow$ $(a_n b_n)$ συγκλίνει

Λάθος $b_n = (-1)^n$, $a_n = 1 \xrightarrow{n} a = 1$ σταθερή

$a_n b_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει

—

$a_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, $b_n = (-1)^n$ $a_n b_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ δεν συγκλίνει

4) $a_n b_n \to \gamma$ $b_n \to b$ $\Rightarrow$ a_n συγκλίνει Λάθος

$a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει

$b_n = 0$

5) $a_n b_n \to \gamma$ $b_n \to b \neq 0$ $\Rightarrow$ (a_n) συγκλίνει

Σωστό $a_n = \frac{a_n b_n}{b_n} \to \frac{\gamma}{b}$

Μάθημα 18 (21/11/2012)

Ασκήσεις Σ-Λ (συνέχεια...)

6) Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών
<u>Λάθος</u> (άτοπο με αρχή ελαχίστου) -σελ 33-

7) Εάν $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ τότε η (a_n) είναι μονότονη δηλαδή αύξουσα ή φθίνουσα ή ισοδύναμα οι μόνες συγκλίνουσες ακολουθίες είναι οι μονότονες
<u>Λάθος</u> $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n]{} 0$ / δεν είναι μονότονη

8) i) $a_n \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Τότε το $\underline{a \in \mathbb{Q}}$
ii) $b_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Τότε το $b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

→ Αν απαντήσουμε Σωστό τότε δεν θα ∃ άρρητοι αριθμοί

i) Λάθος $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} e \notin \mathbb{Q}$

ii) Λάθος $b_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n]{} 0$ $0 \in \mathbb{Q}$

9) $|a_n| \xrightarrow[n]{} |a| \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n]{} a$

($\Leftarrow$) Σωστό.... απόδειξη σελ. 80
($\Rightarrow$) Λάθος $a_n = (-1)^n$ $|a_n| = 1$ ενώ η a_n δε συγκλίνει

10) $|a_n| \xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n]{} 0$ Σωστό
$|a_n| = ||a_n|| \xrightarrow[n]{} 0$

11) Έστω i) $a_n > 0$ και $\lim a_n = a$ Τότε $a > 0$
ii) $\exists\, \mu > 0 : b_n \geq \mu$ και $\lim b_n = b$. Τότε $b > 0$

i) Λάθος: $a_n = \frac{1}{n} > 0$ $a_n \xrightarrow[n]{} a = 0$

ii) Σωστό $\mu \leq b_n \leq M \Rightarrow \mu \leq \lim b_n \leq M \Rightarrow b \geq \mu > 0$.

12) $(a_n)_n$ δεν είναι άνω φραγμένη κ $a_n>0$. Τότε $\lim_n a_n = +\infty$

Λάθος πχ $a_n = \begin{cases} 1 & n = \text{άρτιος} \\ n & n = \text{περιττός} \end{cases}$

13) Θεωρούμε (a_n) αύξουσα και $a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ } Σύνηθες Λάθος
Τότε $\lim_n a_n = M$

Λάθος: $-\frac{1}{n} \uparrow$, $-\frac{1}{n} < 100$ $n \in \mathbb{N}$, αλλά δε συγκλίνει στο 100
Συγκλίνει $\lim(-\frac{1}{n}) = \sup\{-\frac{1}{n}\ n \in \mathbb{N}\} = 0$

14) $(a_n)_n$: $\forall M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι ώστε $a_n > M$
Τότε $\lim_n a_n = +\infty$
Λάθος: $a_n = \begin{cases} n & n = \text{άρτιος} \\ 1 & n = \text{περιττός} \end{cases}$ άπειροι όλοι οι άρτιοι μεγαλύτεροι από ένα M αλλά δε συγκλίνει !!!

15) $a_n \in \mathbb{Z}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ τότε (a_n) τελικά σταθερή ???

$\Rightarrow$ Σωστό $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \varepsilon$ για $n \geq n_0$
Επομένως $|a_n - a_{n_0}| \leq |a_n - a| + |a_{n_0} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $n \geq n_0$
Επειδή $a_n, a_{n_0} \in \mathbb{Z}$
$|a_n - a_{n_0}| < 1$ $n \geq n_0$ Λέει δηλαδή ότι ένας
Άρα $a_n = a_{n_0}$, $n \geq n_0$. φυσικός μικρότερος της μονάδας

Ασκήσεις (**)

1) Θεωρούμε $a \in \mathbb{R}$. Τότε i) α) $\exists\, p_n \in \mathbb{Q}$, (p_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ώστε $\lim p_n = a$

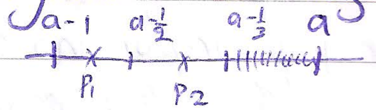
β) και υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}$, (q_n) γνησίως φθίνουσα ακολουθία ώστε $\lim q_n = a$

ii) $\exists\, x_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, (x_n) γν. αύξουσα ακολουθία ώστε $\lim\limits_n (x_n) = a$

$\exists\, y_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, (y_n) γν. φθίνουσα ακολουθία ώστε $\lim (y_n) = a$

Λύση: Κλειδί της άσκησης η Πυκνότητα

i) (α)



Θα $\exists\, p_1 \in \mathbb{Q}: a-1 < p_1 < a-\frac{1}{2}$ $(\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R})$

$\exists\, p_2 \in \mathbb{Q}: a-\frac{1}{2} < p_2 < a-\frac{1}{3}$

$n \in \mathbb{N}$ $\exists\, p_n \in \mathbb{Q}: a-\frac{1}{n} < p_n < a-\frac{1}{n+1}$

Τότε $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ / $p_n \in \mathbb{Q}$

$$\underbrace{a-\frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n} a} < p_n < \underbrace{a}_{\xrightarrow{n} a} \Rightarrow \lim p_n = a$$

2) $A \neq \emptyset$, A = άνω φραγμένο και $s = \sup A$

i) $\exists\, a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ με $\lim\limits_{n} a_n = s$

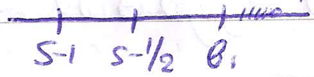
ii) Εάν $s \notin A$ τότε $\exists\, b_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, (b_n) γν. αύξουσα με όριο b_n $\lim b_n = s$

<u>Λύση</u>: i) $n \in \mathbb{N}$, $s - \frac{1}{n} < s$

Επειδή το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, το $s - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα. Υπάρχει $a_n \in A$: $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$ $n \in \mathbb{N}$? (αρα δηλδ το τελικο καλυπτει για $n > n_0$)

Τότε το $\lim\limits_{n} a_n = s$

ii) Έστω ότι το $s \notin A$ $\quad$ $s \notin A$ = άρα δεν είναι maximum



Παίρνουμε $s-1 < s$ οπως $b_1 \in A$: $s - 1 < b_1 < s$ $\quad$ Δε γνωρίζουμε κατά που θέρτουν αυτά τα φράγματα.

$b_1 \in A$, $s \notin A$

Παίρνουμε επίσης $s_2 = \max\{b_1, s - \frac{1}{2}\} < s$

θα $\exists\, b_2 \in A$: $s_2 < b_2 < s$ $\quad \begin{cases} b_1 < b_2 \\ s - \frac{1}{2} < b_2 < s \end{cases}$

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει

$b_1 < b_2 < \ldots < b_n < s$ $\qquad s_{n+1} = \max\{b_n, s - \frac{1}{n+1}\} < s$

$\exists\, b_{n+1} \in A$: $\begin{cases} b_n < b_{n+1} \\ s - \frac{1}{n+1} < b_{n+1} < s \end{cases}$

Έτσι έχει κατασκευάσει μια $(b_n)_n$, $b_n \in A$, $(b_n)\uparrow_n$ $\lim b_n = s$

Ουσιαστικά εντός ύλης Απειροστικού I ⇒ Απειροστικός II

3) Υπακολουθία μιας ακολουθίας | π.χ. οι άρτιοι, οι περιττοί,
Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \dots$ $(k_n)_n \uparrow$ $k_n \in \mathbb{N}$ | n^2, n^3, πρώτοι, $n+1$
(Γνήσια Αύξουσα ακ. φυσικών αριθμών)

Τότε $k_n \geq n$ $n \in \mathbb{N}$ (με επαγωγή) - π.χ. ανεβαίνω δυο δυο τα σκαλιά

Ας υποθέσουμε $(a_n)_n$ η $(a_{k_n})_n$ καλείται υπακολουθία της $(a_n)_n$ $\lim_n a_{k_n} = a \iff \forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ $n \geq n_0$
⇒ Είναι σαν σύνθεση δυο ακολουθιών <<

Ισχύει το εξής: Εάν $\lim_n a_n = a$ τότε $\lim_n a_{k_n} = a$
(εδώ ολόκληρη, δε θα "πηγαίνουν" τα λιγότερα?!?!)

$$\lim_n a_n = a \iff \lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = a$$

(⇒) Σπίτι
(⇐) $\varepsilon > 0$ Αυτή εδώ συγκλίνει στο a
$|a_{2n} - a| < \varepsilon$ $n \geq n_1$
$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon$ $n \geq n_2$
$|a_v - a|$ $v \geq \max\{2n_1, 2n_2+1\}$ Άρα $\lim a_v = a$

Εφαρμογή: • Η $a_n = (-1)^n$ $n \in \mathbb{N}$ δεν συγκλίνει

$$\bullet\ a_n = \begin{cases} 1 & n = \text{άρτιος} \\ -1 & n = \text{περιττός} \end{cases}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δεν ∃ γενική μέθοδος για να δούμε αν μια ακολουθία συγκλίνει ή όχι. Ακόμη κι αν αποδείξουμε ότι συγκλίνει στις περισσότερες δε μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο

Πχ. • $a_n = \frac{1}{n^2 n \ell(n)}$ $n \in \mathbb{N}$. Δεν ξέρουμε αν συγκλίνει ή όχι.

• $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} - \ell n(n) \to \ell$ ℓ=σταθερά Euler.

Δε γνωρίζουμε ακόμα αν $\ell \in \mathbb{Q}$ ή $\ell \notin \mathbb{Q}$ (;;;)

• Αρμονικές σειρές $p>0$

$$a_n^{(p)} = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots \frac{1}{n^p}$$

Γνωρίζουμε ότι $0 < p \leq 1$ $a_n^{(p)} \to +\infty$

$\circ\, p>1$ $a_n^{(p)} \to Z(p) \in \mathbb{R}$

p=άρτιος, $Z(p) = \begin{cases} \pi^2/6 & p=2 \\ \pi^4/90 & p=4 \\ \frac{\pi^6}{945} & p=6 \end{cases}$ ....

p= περιττός $(3, 5, 7 \dots)$,

Γνωρίζουμε μόνο ότι ένας από τους $Z(5), Z(7), Z(11)$ είναι περιττός

Επίσης το 1976 βρέθηκε από τον Apery ότι $Z(3) \notin \mathbb{Q}$

Μάθημα 19 (23-11-2012)