## Μάθημα 19 (23-11-2012)

**Μέθοδοι υπολογισμού ορίου (αν υπάρχει) για απλές ακολουθίες**

Το κλειδί για τον υπολογισμό ορίου (αν υπάρχει) ακολουθίας απλής είναι η (I) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(II) κάθε μονότονη κ φραγμένη είναι συγκλίνουσα

**Χρήσιμες / Απαραίτητες Ακολουθίες**

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Επομένως $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots, \frac{1}{n^k} \xrightarrow{n} 0$ (κ = σταθερό)

$\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \xrightarrow{n} 0$

$\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n-i} \ldots \xrightarrow{n} 0$

ii) $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad 2<e<3$

iii) $a>0$ Τοτε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ οποιοσδήποτε να είναι ο αριθμός $a$ (=σταθ)

Απόδειξη: Εάν $a=1$ τοτε $\sqrt[n]{a}=1 \xrightarrow{n} 1$ κλειδί!! + δύο περιπτ.

Εστω ότι το $a>1$ τότε $\delta_n = \sqrt[n]{a}-1>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>1$

Επομένως $\sqrt[n]{a} = 1+\delta_n$, $a=(1+\delta_n)^n \geq 1+n\delta_n > n\delta_n$

↓ από Bernoulli

{Θέλουμε νδο $\delta_n \to 0$, άρα $\sqrt[n]{a}\to 1$}

Αρα $0<\delta_n<\frac{a}{n} \xrightarrow{n} 0$

από ισοσκελίζουσες $\exists \lim_n \delta_n = 0$

Αρα $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{a}-1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

Θεωρούμε $0<a<1$ Τοτε $\frac{1}{a}>1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$

Επομένως $\lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1} = 1$

» Σημαντική Άσκηση που χρησιμοποιείται συχνά... *

iv) $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$

Για $n\geq 2$ τοτε $\sqrt[n]{n}>1$, $\delta_n = \sqrt[n]{n}-1>0$

Πρέπει νδο $\delta_n \to 0$ άρα $\sqrt[n]{n}\to 1$

$\sqrt[n]{n} = 1+\delta_n$, $n=(1+\delta_n)^n$ (Με Bernoulli $n \geq \ldots \geq n\cdot\delta_n \Rightarrow$

$0<\delta_n<1 \Rightarrow$ φραγμένη ακολουθία.

Δεν ισχύει εδώ διότι το $a$ δεν είναι σταθερό, $a=n$ η Bernoulli: συγκρίνει με παντού βάση)

Γι' αυτό χρησιμοποιούμε διωνυμικό

$n = (1+\delta_n)^2 \geq 1 + \binom{n}{1}\delta_n + \binom{n}{2}\delta_n^2 > \binom{n}{2}\delta_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$

$1>0$ & $\binom{n}{1}\delta_n>0$ πετώ τα άλλα όλα

Άρα $n > \frac{(n-1)n}{2}\delta_n^2$, Επομένως $\delta_n^2 < \frac{2}{n-1} \xrightarrow{n} 0$, άρα $\exists \lim_n \delta_n^2 = 0$

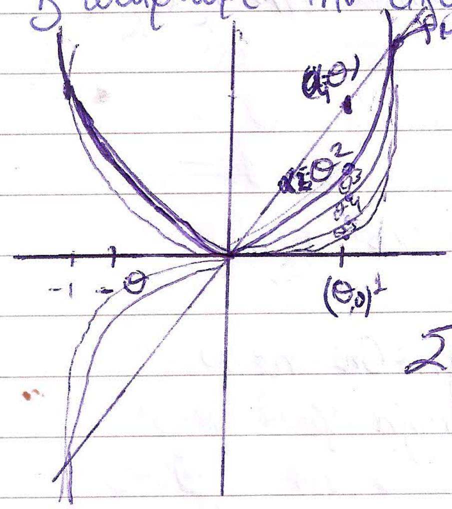
Από $\delta_n \geq 0$ και $\lim_n \delta_n^2 = 0$

$\overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} \lim_n \delta_n = 0$ Άρα $\lim_n (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$

$\Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$

v) Θεωρούμε $\theta \in \mathbb{R}$ (σταθερό)

και θεωρούμε την ακολουθία $(\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4 \dots) = (a_n)_n$ $a_n = \theta^n$ $n \in \mathbb{N}$




Θέλουμε να τη μελετήσουμε για αυθαίρετο θ

Άρα για θ θεωρούμε $f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2$

Το ύψος πηγαίνει στο μηδέν. $f_3(x) = x^3$, $|x| < 1$

$\vdots$

$f_n(x) = x^n$

Συνεπώς

$\theta^n \xrightarrow{n} 0$, $0 \leq |\theta| < 1$ *

$\theta^n \xrightarrow{n} 1$, $\theta = 1$

$\theta^n \xrightarrow{n} +\infty$, $\theta > 1$

δε συγκλίνει στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\theta \leq -1$ >> γιατί τότε μεγαλώνει και μικραίνει όσο [illegible]

Περίπτωση όπου $\theta = 0$, $a_n = 0 \xrightarrow{n} 0$

- $0 < |\theta| < 1$

$0 < |a_{n+1}| = |\theta^{n+1}| = |\theta||\theta^n| = |\theta||a_n| < |a_n|$

Η $(|a_n|)_n$ είναι γνησίως φθίνουσα κάτω φραγμένη

(0 = κάτω φράγμα) $\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} |a_n| = a \geq 0$ το a είναι το inf αυτής

Πρέπει να αποδείξουμε ότι $a = 0$

Έστω ότι $a > 0$ τότε το $\lim_n \theta^{n+1} = |\theta| \lim_{n \to +\infty} |\theta^n| = |\theta| a$

Άτοπο ($a \neq 0$, $|\theta| < 1$ μα είναι μικρότερο)

Άρα $\lim_n |\theta^n| = 0$ $\begin{pmatrix} b_n \to b \\ b_{n+1} \to b \end{pmatrix}$

Βρήκαμε λοιπόν $|a_n| \xrightarrow[n]{} 0$ Συνεπώς για $0<|\theta|<1$ το $\lim_n a_n = 0$

- $\theta=1$, $a_n = 1 \xrightarrow[n]{} 1$
- $\theta>1$: $0<\frac{1}{\theta}<1 \Rightarrow \lim\left(\frac{1}{\theta}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim \theta^n = +\infty$ άμεσα από το προηγούμενο

β' τρόπος $0 < |a_{n+1}| = |\theta^{n+1}| = \underset{(\theta>1)}{\theta \cdot \theta^n} |a_n| > |a_n|$ $n \in \mathbb{N}$ $\cdot (a_n)_n \uparrow$ κτλ.

- $\theta \leq -1$ δεν συγκλίνει

Τι χρησιμοποιούμε για να βρούμε το όριο της $(a_n)_n$ αν $\exists$ στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

(I) 1) $(\gamma_n)_n$ βρίσκουμε $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ με $a_n \leq \gamma_n \leq b_n$ $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \gamma \in \mathbb{R}$ Τότε $\exists \lim_n \gamma_n = \gamma$

2) $(\gamma_n)_n$, $0 \leq \gamma_n \leq b_n$, $\lim_n b_n = 0$ Τότε $\exists \lim_n \gamma_n = 0$

3) $(\gamma_n)_n$ αν $\gamma_n \geq a_n$ και $\lim_n a_n = +\infty$ τότε $\lim_n \gamma_n = +\infty$

4) $\gamma_n \leq b_n$ $\lim b_n = -\infty$. Τότε $\lim \gamma_n = -\infty$

(II) Κριτήριο του Λόγου και το Κριτήριο της Ρίζας

- Κριτήριο του Λόγου

Έστω $(a_n)_n$ $a_n \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$

Έστω επίσης ότι $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

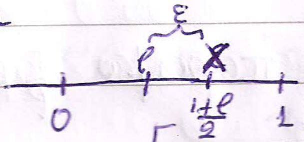
Τότε i) $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell < 1 \Rightarrow \lim a_n = 0$

αν

ii) $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell > 1 \Rightarrow \lim |a_n| = +\infty$

→ iii) $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell = 1$ Τότε δεν έχουμε συμπέρασμα για την $a_n$

<ins>Απόδειξη:</ins> Έστω ότι $\ell < 1$



$\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$. $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \frac{1+\ell}{2} < 1$, $n \geq n_0$. → Τυχαίο $1 + \frac{1-\ell}{2}$

$(|a_n|)_n$ για $n \geq n_0$ ↓, κάτω φραγμ. $(|a_n| > 0)$. Άρα $\exists \lim_n |a_n| = a \geq 0$

Έστω ότι $a > 0$ $\ell = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a}{a} = 1$ → Άτοπο $\ell < 1$ Άρα $a = 0$

$\lim |a_n| = 0$, $\lim a_n = 0$

$\overline{1} > \frac{1}{\ell} = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\frac{1}{|a_{n+1}|}}{\frac{1}{|a_n|}} \to \lim \frac{1}{|a_n|} = 0$

$\lim |a_n| = +\infty$

◇ S.O.S. Δεν ξεχνάμε απόλυτες τιμές, εκτός αν $(a_n \geq 0, n \in \mathbb{N})$ όλες θετικές ή αρνητικές $(a_n < 0\ n \in \mathbb{N})$

iii) Στη περίπτωση που $\ell = 1$

Πρέπει να μη βγάζουμε συμπεράσματα

$a_n = (-1)^n$ $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$

Αποτέλεσμα

- $b_n = b \neq 0$ τότε $b_n \to b \neq 0$, $\lim_n \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = 1$ και $b_n = b \xrightarrow[n]{} b$

- $\gamma_n = n$ τότε $\lim \frac{|\gamma_{n+1}|}{|\gamma_n|} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. και $\gamma_n = n \xrightarrow[n]{} +\infty$

  $\downarrow +\infty$

- <ins>Κριτήριο της Ρίζας</ins>

$a_n \neq 0$ και $\ell = \lim \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

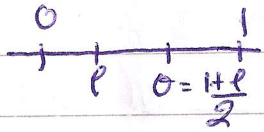
Εάν: • $\ell < 1$ τότε $\exists \lim_n a_n = 0$

• $\ell > 1$ τότε $\exists \lim_n a_n = +\infty$

• $\ell = 1$ ΔΕΝ ΕΧΩ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

<ins>Απόδειξη:</ins>

Έστω ότι $\ell < 1$



$\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{|a_n|} < \theta$ $n \geq n_0$ με $\underline{0 < \theta < 1}$

Τότε $|a_n| < \theta^n$ $n \geq n_0$

Αρα επειδή ( $0<\theta<1 \Rightarrow \theta^n \xrightarrow[n]{} 0$ $\Rightarrow \lim|a_n|=0$. Άρα $\lim a_n=0$

ii) Για $\ell>1$ θα πάρουμε $\frac{1}{\ell}<1$ ....

**III** Μονότονη + Φραγμένη $\Rightarrow$ Συγκλίνουσα
Κυρίως για ακολουθίες με <u>αναδρομικό τύπο</u>

**IV** Αρχή της Μεταφοράς

$(a_n)_n$

πχ $\frac{n}{e^n}$ $\quad f(x)=\frac{x}{e^x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ / Τότε από αρχή της μεταφοράς $\frac{n}{e^n}\to 0$

$x_n\to+\infty \;//\; f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} a \Rightarrow \lim_n f(x_n)=a$

<u>Ασκήσεις</u>

1) $a_n=\frac{\eta\mu n}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ $\quad |\eta\mu n|\le 1$, $\frac{1}{n}\to 0 \Rightarrow \lim \frac{\eta\mu(n)}{n}=0$

2) $a_n=\frac{\sigma\upsilon\nu(n^{100^{100}})+\eta\mu(n^2+n+200)}{n^2}$ $\quad \frac{1}{n^2}\to 0$, $|\quad| \le 2$

άρα $\lim a_n=0$

Και στις δύο περιπτώσεις 1), 2) έχουμε μηδενική (x) φραγμένη που μας κάνει μηδενική (αποδείχθηκε σελ 81, Μάθημα 16)

3) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{\eta\mu(n^{114})}{\sqrt{n^{211}}}$

$|a_n|\le\frac{1}{\sqrt{n^{211}}}=\frac{1}{(\sqrt{n})^{211}}\to 0$

$\lim|a_n|=0 \Rightarrow \lim a_n=0$

100 ???

## Μάθημα 20 (26/11/2012)

Ασκήσεις (... συνέχεια)

4) $a_n = \frac{n^2-n}{n^2+1}$ Την αντιμετωπίζω ως $\frac{\text{πολυώνυμο}}{\text{πολυώνυμο}}$

$a_n = \frac{n^2(1-\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$ $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim(1+\frac{1}{n^2}) = 1 \neq 0$ $\Big/$ $\exists \lim a_n = \frac{1}{1} = 1$

5) $a_n = \frac{3n^3-8n^2+1}{18n^3+17n^2+10^{10}} \Rightarrow a_n = \frac{3-\frac{1}{n}8+1/n^3}{18+\frac{17}{n}+\frac{10^{10}}{n^3}} \xrightarrow{1/n,\, 1/n^3 \to 0} \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Παρατηρούμε στις δύο αυτές ασκήσεις ότι το $n$ είναι ίδιας τάξεως

6) $a_n = \frac{3n^3-7n^2}{n^5+8} = \frac{\frac{3}{n^2}-\frac{7}{n^3}}{1+\frac{8}{n^5}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0$

» Πάντοτε βγάζω το μεγαλύτερο του αριθμητή στον παρονομαστή όταν το $n$ δεν είναι ίδιας τάξεως

7) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow{n} 0$

» Τη φέρνουμε στη μορφή που να μην έχει απροσδιοριστία

8) $a_n = \sqrt{n^2-2n}-n \quad (n \geq 3)$

$= \sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2} = \frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$

$= \frac{-2n}{n(\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1)} = \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1} \xrightarrow{n} -1$

» Το ανάγουμε σε ματαιοσύνες που γνωρίζουμε

Παλαιό Θέμα ???

9) $a, b \in \mathbb{R}$ Γεωμετρικός - Αριθμητικός Μέσος

$\sqrt{(n+a)(n+b)} - \frac{(n+a)(n+b)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $(\alpha, b \in \mathbb{R}$ σταθερά$)$

Γενικά εάν έχουμε $a_1, a_2 \dots a_k \in \mathbb{R}$ τότε

$\sqrt{(n+a_1)\dots(n+a_k)} - \frac{(n+a_1)+\dots+(n+a_k)}{k} \xrightarrow{n} 0$

» Για να το αποδείξουμε χρήση ταυτότητας ή όχι σύνηθες παράσταση

Παίρνουμε την ακολουθία

$\sqrt{(n+a)(n+b)}-n$ κ θα δείξουμε ότι συγκλίνει στο $\frac{(n+a)+(n+b)}{2}$

$=\sqrt{(n+a)(n+b)}-\sqrt{n^2}$ θα το πάμε έπειτα από την άλλη κ έγινε

$$=\frac{(n+a)(n+b)-n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=\frac{n(a+b)+ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)}+n}=\frac{n\left[(a+b)+\frac{ab}{n}\right]}{n\left[\sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)}+1\right]}$$

$$=\frac{(a+b)+\frac{ab}{n}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)}+1}\xrightarrow{n}\frac{a+b}{2}$$

---

10) $a_n=\frac{1}{2^n}$ $\quad\gamma_n=(-1)^n\left(\frac{10}{3}\right)^n$

$b_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$ $\quad\delta_n=e^n$

Θυμόμαστε:
$\theta\in\mathbb{R}$ κ ξέρουμε ότι αν $|\theta|<1$ τότε $\theta^n\to 0$ σελ 97
κ αν $\theta>1\Rightarrow\theta^n\to+\infty$
$\theta\le -1$ Αποκλίνει

$a_n=\frac{1}{2^n}\xrightarrow{n}0$ διότι $\theta=\frac{1}{2}<1$

$b_n=\frac{(-1)^n}{3}\xrightarrow{n}0$ διότι $\theta=-\frac{1}{3}$ $|\theta|=\frac{1}{3}<1$

$\gamma_n=(-1)^n\left(\frac{10}{3}\right)^n$, $\quad\theta=-\frac{10}{3}<-1$ Αποκλίνει!

» Δίχως εξήγηση: αρκεί να ξέρουμε
δε πάμε κατά περίπτωση, αλλά εφαρμόζουμε τ. θεώρ

$\delta_n=e^n\xrightarrow{n}+\infty$ διότι $\theta=e>1$

Γεωμετρική Πρόοδος

Θεωρούμε $a\neq 0,1$, $n=$ σταθερό $1, a, a^2, a^3 \dots a^n$
Κάθε όρος είναι πολλαπλάσιος με έναν $a$

$S_n=1+a+a^2+\dots+a^n$

α' τρόπος

Παρατηρούμε ότι $(1-a^{n+1})=(1-a)(1+a^2+a^3+\dots a^n)$

$$\boxed{S_n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$$

β' τρόπος

$$S_n = 1+a+a^2+\dots a^n$$
$$aS_n = a+a^2+a^3+\dots a^{n+1}$$
$$S_n - aS_n = 1-a^{n+1}$$
$$S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$ από Euler Όϋλερ

ii) Θεωρούμε $a_0=1$, $a_1=1+\theta$, $a_2=1+\theta+\theta^2$

$a_n = 1+\theta+\theta^2+\dots\theta^n$ δηλ το όριο του αθροίσματος $S_n$

δηλ $\lim_n a_n = \lim_n S_n = \lim_n (1+\theta+\theta^2+\dots+\theta^n) = \lim_n \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}$

Όμως $\lim_n \theta^n = 0 \iff |\theta|<1$ Σ' αυτή τη περίσταση όπου $|\theta|<1$ το $\lim(1+\theta+\theta^2+\dots\theta^n) = \frac{1}{1-\theta}$ (διότι $\lim\theta^{n+1} = \theta\lim\theta^n$

Σημείωση: Για $\theta>1$ $\lim_{n\to+\infty}(1+\theta+\theta^2+\dots\theta^n) = +\infty$

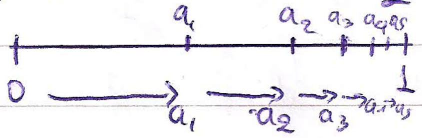
Περίεργο Ζήνωνος: Αν προσθέσουμε άπειρα θετικά θα μας δώσει το

• $\lim_{n\to+\infty}(1+\theta+\theta^2+\dots+\theta^n) = 1+\theta+\theta^2+\dots$
$= \sum_{k=0}^{\infty}\theta^k$ όπου ($\theta^0=1$) Γεωμετρική σειρά

Όμως:
Προσθέτοντας άπειρα θετικά παίρνουμε όσο μικρό αριθμό θέλουμε.

Εφαρμογή 1

Θεωρούμε την $a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\frac{1}{2^n}$




δηλ προσθέτουμε το μισό του μένει μέχρι τη μονάδα

Συνεπώς $a_n = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{n \text{ στοιχεία}} \xrightarrow{\theta=\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Εφαρμογή 2

$a = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\dots = \underset{1}{0,999}\dots$

$a_n = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\dots\frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\dots\frac{1}{10^{n-1}}\right) \longrightarrow \frac{9\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$

12) $a_n = \frac{2^n+n}{3^n+n^2}$ $\quad 0 < a_n \le \frac{2^n+2^n}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n} 0$

Επειδή $\theta = \frac{2}{3} < 1$

Άρα $\lim \frac{2^n+n}{3^n+n^2} = 0$

13) $a_n = \frac{e^n+1}{2^n+10^{10}} \ge \frac{e^n}{2^n+2^n}$ $\left(\text{γτ } 2^n \to +\infty,\ 2^n > 10^{10} \text{ τελικά}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n \xrightarrow{n} +\infty$

διότι $\theta = \frac{e}{2} > 1$ $\quad$ Άρα $\lim_n a_n = +\infty$

Όταν ∃ δυνάμεις + $n, n^2 \dots$ εκείνο που υπερισχύει είναι η εκθετική

14)

$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \frac{1}{(n+n)^2}$ $\quad$ Βάνουμε κριτήριο Παρεμβολής

$0 < a_n \le (n+1)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

μέχρι n : άρα n+1 στοιχεία

ο πιο μεγάλος από αυτούς

Άρα ∃ $\lim a_n = 0$

15) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$1 \xleftarrow{n} n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \xrightarrow{n} 1$

το μικρότερο για να το 'βλέπω'

Άρα ∃ $\lim a_n = 1$

Το λάθος $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \to 0$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 0$

άρα λέμε ότι μηδενίζουν όλοι όροι $n \to \infty$

ισχύει για [illegible] στο 0

Άρα μηδενική + μηδενική + ... + μηδενική με $n \to +\infty$

άρα είναι σαν να λέμε $0(+\infty) = 0$

εδώ όμως είναι 1

16) $a_n = \sqrt[n]{5n+1}$

$1 \le a_n \le \sqrt[n]{5n+n} = \sqrt[n]{6n} = \sqrt[n]{6}\cdot\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n} 1$

$\lim a_n = 1$

Οτι ξ να χει μεσα στη ριζα διαφορο του μηδενός.

17) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3n+2}{2n+5}}$ $\quad 1 \leftarrow \dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{7n}} \le a_n \le \dfrac{\sqrt[n]{3n+n}}{\sqrt[n]{2n}} = \dfrac{\sqrt[n]{4}\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n]{} 1$

$\lim\limits_{n} a_n = 1$

18) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{8n^2+1}{2n+1}}$ $\quad 1 \le a_n \le \dfrac{\sqrt[n]{8n^2+n^2}}{\sqrt[n]{2n}} = \dfrac{\sqrt[n]{9}\,(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}} \to 1$

$\lim a_n = 1$

19) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$

$3 = \sqrt[n]{3^n} \le a_n \le \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \to 3$

Αρα απο ισοσυγκλινουσες $\lim\limits_{n} a_n = 3$

20) $a_n = \sqrt[n]{7^n + 114^n}$

$114 = \sqrt[n]{114^n} \le a_n \le \sqrt[n]{2\cdot 114^n} = 114\sqrt[n]{2} \to 114$

$\exists \lim a_n = 114$

Γενικά:

21) Θεωρούμε $a, b > 0$ ξ $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \longrightarrow \max\{a, b\}$

22) Κριτήριο Λόγου - Κριτήριο Ρίζας

$a_n = \dfrac{n}{2^n}$ , $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{2^n}$

Κριτήριο Λόγω

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to \ell = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n} \dfrac{n}{2^n} = 0$

ακολουθια συγκλινει σε ενα φθινουσα γν.

Κριτήριο Ρίζας

- $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2}} \to \frac{1}{2} = \ell < 1$   Βγάζουν τα δύο κριτήρια το ίδιο πράγμα

- $a_n = |b_n| \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$   (ή $b_n = (-1)^n \alpha_n$ = Φρ. x Μηδ $\Rightarrow b_n \to 0$).

23) $a_n = \frac{(-1)^n n^{2020}}{4^n}$

Κριτήριο Λόγου $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^{2020}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n^{2020}} = \frac{(n+1)^{2020}}{n^{2020} \cdot 4} \to \ell = \frac{1}{4} < 1$

Κριτήριο Ρίζας $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell = \frac{1}{4} < 1$ / Άρα $\lim_n x_n = 0$.

24*) $|\theta| < 1$   $\kappa$ = σταθερό

$\lim_{n \to +\infty} n^k \theta^n = 0$   Λόγος ή Ρίζας $\ell = |\theta| < 1$

η $\theta^n$ τρέχει πιο γρήγορα από ένα πολυώνυμο του n

25) $a_n = (\sqrt[n]{10} - \sqrt[n]{5})^n$   (Θέμα Σεπτεμβρίου)

Κριτήριο Ρίζας

$\sqrt[n]{|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{10}}_{\to 1} - \underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\to 1} \to \ell = 0 < 1$   Άρα $\lim_n a_n = 0$

# Μάθημα 21 (27/11/2012)

Ασκήσεις (... συνέχεια)

26) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^4}{n!}$ , $b_n = \frac{n!(-1)^n}{n^n}$

$\gamma_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ , $\delta_n = \frac{3^n n!}{n^n}$

(Έχει πέσει αρόσοδο ξ Σεπτέμβρη)

Όλες έχουν ως κοινό γνώρισμα το παραγοντικό.
Όταν έχετε παραγοντικό μόνος τρόπος κριτήριο του λόγου

$\lim_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \ell$

- $\ell<1$ $\quad \lim x_n = 0$
- $\ell>1$ $\quad \lim |x_n| = +\infty$
- $\ell=1$ $\quad$ Δεν βγάζαμε συμπέρασμα

- $a_n \neq 0$

$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \frac{n!}{n^4}$

$= \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ Επομένως $\lim a_n = 0$

- $\lim_n \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_n \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \lim_n \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$= \lim_n \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ , $\lim b_n = 0$

- $\lim_n \frac{|\gamma_{n+1}|}{|\gamma_n|} = \lim_n \frac{2^{n+1}(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} 2^n\, n!} = \lim 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{(2<e<3)}{=\!=} 2\lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$

Από το κριτήριο $\lim \gamma_n = 0$ / Γενικά : $\boxed{x_n = \frac{n!}{n^n}\alpha^n}$ για $|\alpha|<e$ , $x_n \to 0$
$|\alpha|>e$ , δεν συγκλίνει
(Εκτός ύλης) Τύπος Stirling ← $\alpha = e$ // $x_n \to +\infty$

- $\lim_n \frac{|\delta_{n+1}|}{|\delta_n|} = \lim_n 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1$ ξ επειδή $\delta_n > 0$ $\lim_n \delta_n = +\infty$

---

27) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ . $\quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \uparrow_n$ $\quad x_n \xrightarrow[n]{} e$

$n^2 > n$ , $x_{n^2} > x_n$

Άρα $e > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Επομένως για την $x_n$ ξέρατε οι γν. αύξουσα ξ $\sup = e$

$\sqrt[n]{e} > a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1+\frac{1}{n} \searrow 1$
Άρα $\lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$

28) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ Γνωρίζω ότι $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

$x_{2n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$

Τότε $a_n = \sqrt[2]{x_{2n}} \xrightarrow[n]{} \sqrt[2]{e}$

Σημείωση:

Γενικά: $a \in \mathbb{R}$ $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n]{} e^a$ ~ Δεν έχει οριστεί ακόμα η $e^x$, $x\in\mathbb{R}$

**

29**) $\lim a_n = a > 0$

** Τότε $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$

$\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ $\lim_n a_n = a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $a - \frac{a}{2} < a_n < a + \frac{a}{2}$ για $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3a}{2}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3a}{2}}$

$\lim_n \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{3a}{2}} = 1$ Επομένως από ισοσυγκλίνουσες

$\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$

Εφαρμογή

$a_1, a_2 \dots a_k > 0$ ($k$ = σταθερό)

$\lim_n \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2 \dots a_k\}$

Υποθέτουμε ότι $a_1 = \max\{a_1, a_2 \dots a_k\}$

$\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots a_k^n} = a_1 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \dots \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^n} \longrightarrow a_1$

$\to a \geq 1 > 0$

30) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{2n}$ Να αποδειχθεί ότι συγκλίνει

$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{2n} < a_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$ (αλλά δεν μπορούμε να βγάλουμε ότι $a_n > 1$ αλλά μόνο ότι $\frac{1}{2} < a_n$)

Κοιτάζουμε την μονοτονία $a_{n+1} - a_n =$

$= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \dots + \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)}$

$- \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} \quad \cancel{- \frac{2}{n}}$

$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} > 0$

{Είναι λάθος να πάμε $\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n+1}} + \underset{\searrow 0}{\frac{1}{n+2}} + \dots$ άρα όλο τείνε στο μηδέν}

Επομένως η $a_n$ είναι γν. αύξουσα, άνω φραγμένη, άρα και συγκλίνει δηλ. $\exists\, \ell \in \mathbb{R} : \lim a_n = \ell$ (ΘΕΜΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ)

<u>Απλή σημείωση</u> $\lim_n \left(\frac{1}{n+1} + \dots \frac{1}{2n}\right) = \ln(2)$

Άσκηση 31 (Φροντιστήριο)

Έστω $a_n \neq 0$ και $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$

Τότε το $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$

Δεν ισχύει το αντίστροφο

Κριτήριο λόγου κ κρ. ρίζας ισοδύναμα σε καλές περιπτώσεις - καταστάσεις.

Το θέμα εδώ είναι ότι μπορεί να υπάρχει η δεύτερη ενώ η πρώτη όχι.

<u>Ασκήσεις Σ/Λ</u>

1) $\lim a_n = 1$ τότε $\lim_n a_n^n = 1$ (Θέμα Φεβρουαρίου)

<u>Λάθος</u> πχ $a_n = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 1$, $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 1$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $2$ | $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ | $\dots$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | $\to e$ |
| $a_n^2$ | $2^2$ | $\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\right)^2$ | $\dots$ | $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2$ | $\to e^2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_n^k$ | $2^k$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\to e^k$ |
| | $+\infty$ | $+\infty$ | | $+\infty$ | |

2) $\lim a_n = 1$ τότε $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (Σεπτέμβρης 2012)

Σωστό $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2} < a_n < \frac{3}{2}$ για $n \geq n_0$

$$\underset{\xrightarrow[n]{} 1}{\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}} < \sqrt[n]{a_n} < \underset{\xrightarrow[n]{} 1}{\sqrt[n]{\tfrac{3}{2}}}$$

Άρα $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$

3) $\lim_n a_n = a > 0$ Τότε $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 1$ Σωστό από Άσκηση 29 σελ 108

4) $a_n \to 0$, $a_n > 0$ και $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = a$ $a \in \mathbb{R}$

Τότε $a \in [0,1]$

Έστω ότι $a > 1$

Θα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a_n} > \frac{a+1}{2} > 1$ $n \geq n_0$

$a_n > 1$ $n \geq n_0$

$0 = \lim a_n \geq 1$ Αδύνατον άρα $a \in [0,1]$

ή από Κριτήριο Ρίζας αν $a > 1 \Rightarrow \lim a_n = +\infty$ Αδύνατο

5) $a_n \neq 0$ $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ Τότε $\lim a_n = 0$

Λάθος πχ. $a_n = (-1)^n \neq 0$ και $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim(-1) = -1 < 1$

$(a_n)_n$ αποκλίνει

Μεγάλο λάθος διότι ξεχάσαμε τα απόλυτα

Αναδρομικές ακολουθίες

Θεώρημα Μονότονων Ακολουθιών

Ασκήσεις

1) $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ $n = 1, 2, \dots$ $(\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \dots)$

Εξετάσθε εάν συγκλίνει και αν ναι πόσο κάνει το όριο

Λύση:

• $(a_n)_n$ $a_n > 0$ $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$, $a_1 = \sqrt{3} > 0$

Έστω $a_n > 0$ τότε $a_{n+1} = \sqrt{3a_n} > 0$

Η $(a_n)_n$ αύξουσα

Για $n=1$ $a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1$ Ισχύει

Έστω ότι $a_{n+1} > a_n$

Θα αποδείξουμε επομένως $a_{n+2} = \sqrt{3a_{n+1}} > 3\sqrt{a_n} = a_{n+1}$ ισχύει για $(n+1)$

Από τη Μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής έχουμε

$a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

• $(a_n)_n$ είναι φραγμένη από το 10 (παραδείγματος χάρην)
$a_1=\sqrt{3}<10$ ισχύει

Έστω ότι $a_n<10$ Τότε χρησιμοποιώντας το επαγωγικό βήμα
$a_{n+1}=\sqrt{3a_n}<\sqrt{3\cdot 10}<10$ ισχύει

Άρα αυτή είναι φραγμένη από το 10
Από το Θεμελιώδες Θεώρημα $\exists\, a=\lim_n a_n=\sup a_n>0$

Έχουμε ότι $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$
Άρα $(a_n, a_{n+1}\to a)$ $a=\sqrt{3a}\Rightarrow a^2=3a\Rightarrow \underline{a=3}$

2) Έστω ότι $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+1}=1+\dfrac{a_n}{1+a_n}$ $n\in\mathbb{N}$
• Πρέπει να δείξουμε ότι $a_n>0$ $n\in\mathbb{N}$ (...) επαγωγικά
• $(a_n)_n \uparrow$
• $a_2=1+\dfrac{1}{1+1}>1=a_1$ ισχύει

Έστω $a_{n+1}>a_n$
$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{2a_{n+1}+1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{2a_n+1}{a_n+1}=\dfrac{2(a_{n+1}-a_n)}{(1+a_{n+1})(1+a_n)}>0$

• $a_n<3$, για $a_1=1<3$
κ παίρνουμε $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+1}<\dfrac{2a_n+2}{a_n+1}=2<3$ Άρα άνω φραγμένη

Το $\lim_n a_n=\lim_n a_{n+1}=a>1$
Από αναδρομική σχέση $a=\dfrac{2a+1}{a+1}$, $a^2-a-1=0$, $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Σημείωση: Οι $a_n\in\mathbb{Q}$ και $a_n\to a\notin\mathbb{Q}$

3) $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$ Ιδιαιτερότητα

Καταρχάς η $a_n>0$ (....)

• $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$ ⊛

$\left( \frac{\gamma+\delta}{2} \geq \sqrt{\gamma \cdot \delta} \right)$

• $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{1}{a_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{2}$

$= \frac{2 - a_{n+1}^2}{2a_{n+1}} \leq 0$ Άρα $a_{n+2} \leq a_{n+1}$ *

Φθίνουσα + φραγμένη $\Rightarrow \exists\, a>0$, με $\lim a_n = \lim a_{n+1} = a$

Άρα $a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{2}}$ δηλ το a είναι το inf

4) $a>0$ (σταθερό) $x_1>0$ (τυχαίο σταθερό)

• $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$

Όμοιως με την 3) αλλά στη θέση του 2 έχουμε a

Συνεπώς $\lim_n x_n = \sqrt{a}$