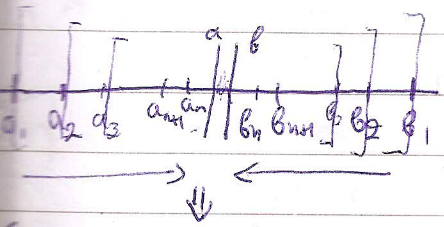
Μάθημα 22 (28/11/2012)

Ασκήσεις με ακολουθίες (Συμπληρωματικές)

1) Έστω $(a_n)_n$ αύξουσα ακολουθία, $(b_n)_n$ φθίνουσα ακολουθία, $a_n \le b_n$ $\;n \in \mathbb{N}$



Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [a, b] \neq \emptyset$

Εάν επιπλέον $\lim(b_n - a_n) = 0$ τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{a\}$

(Σκεφτόμαστε σαν τις μπάμπουσκες το ένα μέσα στο άλλο)

Κιβωτισμός Διαστημάτων

Λύση: $a_n \le b_1$, η $(a_n)\uparrow \Rightarrow \exists \lim_n a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\} = a \in \mathbb{R}$

$b_n \ge a_1$, $(b_n)\downarrow \Rightarrow \exists \lim b_n = \inf\{b_n, n \in \mathbb{N}\} = b \in \mathbb{R}$

Επειδή μας έχουν δώσει $a_n \le b_n$ προκύπτει $a \le b$

Θα αποδείξουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [a, b]$

$x \in [a, b]$, $a \le x \le b$

Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ $\;a_n \le a = \sup A \le x \le b = \inf B \le b_n$

$x \in [a_n, b_n]$ Άρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

Και τώρα, το ανάποδο $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, ~~για κάθε $n \in \mathbb{N}$~~

$a_n \le y \le b_n$ $\;\forall n \in \mathbb{N}$ / $a_n \le y$ $\;n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \le y$ (άνω φράγμα), $y \le b_n$ $\;n \in \mathbb{N} \Rightarrow y \le b$ $\;\}\; a \le y \le b$, $y \in [a, b]$

Σημείωση: Ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα $(a_n, b_n]$ $n \in \mathbb{N}$;

Ας πάρουμε $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$ $\;n \in \mathbb{N}$ $\;0 \notin (0, \frac{1}{n}]$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] = \emptyset$

Άσκηση 2

(Άσκηση 31 για $a=0$), $a_n \neq 0$, $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=0$
τότε η $\lim \sqrt[n]{|a_n|}=0$ ($a\in[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$ ισχύει το ίδιο με α αντί για 0. Βλ. φροντιστήριο)

Λύση: Παίρνουμε $\varepsilon>0$

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=0 \quad ; \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<\frac{\varepsilon}{2} \quad . \ n\geq n_0$$

$n\geq n_0+1$ τότε

$$a_n=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}|<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}|a_{n_0}|=\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n|a_{n_0}|}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_0}}$$

$n_0=n-(n-n_0)$

Συνεπώς $|a_n|<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \beta$, $n\geq n_0$, όπου $\beta=\frac{|a_{n_0}|}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n_0}}$ (σταθερό)

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}<\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[n]{\beta}, \quad n\geq n_0 \quad (1)$$

$$\lim_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[n]{\beta}\right)=\frac{\varepsilon}{2}. \text{ Άρα } \exists N_1: \frac{\varepsilon}{2}\sqrt[n]{\beta}<\varepsilon \text{ για } n\geq N_1 \quad (2)$$

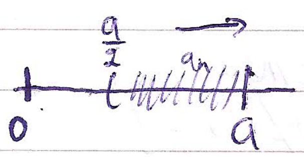
$N_0=N_1+n_0+1$

$$n\geq N_0 \begin{cases} n\geq n_0+1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{|a_n|}<\frac{\varepsilon}{2}\sqrt[n]{\beta} \\ n\geq N_1 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{\varepsilon}{2}\sqrt[n]{\beta}<\varepsilon \end{cases} \quad n\geq N_0 \text{ τότε } \sqrt[n]{|a_n|}<\varepsilon.$$

Άρα $\lim \sqrt[n]{|a_n|}=0$

Άσκηση 3

Έστω $a_n>0$ η $\lim a_n=a>0$
Τότε $\inf\{a_n: n\in\mathbb{N}\}>0$



$n\geq n_0$

Για $\varepsilon=\frac{a}{2}$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$:
$\frac{a}{2}=a-\frac{a}{2}<a_n$ για $n\geq n_0$

$\mu=\min\{a_1,a_2,\dots,a_{n_0},\frac{a}{2}\}>0$

$n\in\mathbb{N}$ $a_n\geq\mu$ ($n\in\{1,\dots,n_0\}$ $a_n\geq\mu$; $n>n_0$ $a_n>\frac{a}{2}\geq\mu$)

$\mu > 0$ είναι κάτω φράγμα του $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$
$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \mu > 0$

Άσκηση 4

$a_n > 0$, $\lim a_n = 0$ $A = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ Τότε $\underline{\sup A \in A}$

Σημείωση: Αν η (a_n) συγκλίνει $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A$ το σύνολο τιμών της έχει $\sup A, \inf A \in \mathbb{R}$ (κάθε συγκλίνουσα είναι φραγμένη)

<u>α' τρόπος</u> / (β' τρόπος : Απ. Γιαν)

Έστω $\sup A \notin A \Rightarrow \exists\, a_{k_n} \in A : a_{k_1} < a_{k_2} < \dots < a_{k_n}$
με $a_{k_n} \to \sup A \geq a_1 > 0$ $(k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots)$ (1)

υπ. $\exists$ μια γν. αύξουσα ακολουθία (που αφορά με άσκηση) θα συγκλίνει στο $\sup A$

Όμως η $a_n \to 0 \Rightarrow a_{k_n} \to 0$ (2) Από (1),(2) Άτοπο

Άσκηση 5 / Να εξετάσετε αν η $(a_n)_n$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριο (αν υπάρχει)

$a_1 = 0$ $a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2+1}{2a_n+2}$ / $a_2 = \frac{1}{2} > 0$ ισχύει

- $a_{n+1} > 0$ / $a_{k+1} > 0 \xRightarrow[\text{φράγμα}]{\text{από}} a_{(k+1)+1} > 0$ Ισχύει για $\underline{\nu \geq 2}$
- $a_{n+1} - a_n = \dfrac{3a_n^2+1}{2a_n+2} - a_n = \dfrac{a_n^2 - 2a_n + 1}{2a_n+2} = \dfrac{(a_n-1)^2}{2a_n+2} \geq 0$

Άρα $(a_n)_n \uparrow$

<u>Κόλπο</u>

αύξουσα $(a_n)_n \uparrow$ αν συγκλίνει / που θα συγκλίνει στο sup, το sup από φράγμα

s

Αν ήταν φραγμένη, θα υπήρχε το όριο
$\lim a_n = \sup a_n = s \in \mathbb{R}$
άρα $s = \dfrac{3s^2+1}{2s+2} \Rightarrow s = 1$

- $a_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$
  $a_1 = 0 < 1$
  Έστω $a_n \leq 1$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $(n+1)$

$a_{n+1} < 1 \iff 3a_n^2 + 1 \leq 2a_n + 2 \iff$

$2a_n^2 + a_n^2 + 1 \leq 2a_n + 2$

$2a_n^2 + a_n^2 + 1 \leq 2a_n + 1 + 1 = 2a_n + 2$ ισχύει

Άρα η (a_n) συγκλίνει στο $S = 1$

Άσκηση 6

$0 < a_1 < b_1$,

$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ $\quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

i) Να αποδειχθεί ότι $a_{n+1} \leq b_{n+1}$

ii) $(a_n)\uparrow$, $(b_n)\downarrow$

iii) $\exists \lim_n a_n = \lim_n b_n$

Λύση:

i) • $a_n, b_n > 0$

• $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \dfrac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ (σελίδα 101)

ii) $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad (a_n)_n \uparrow$

$b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq \dfrac{b_n + b_n}{2} = b_n$ $\quad (b_n)_n \downarrow$

iii)

(a_n): Φραγμένη, αύξουσα $\Rightarrow$ συγκλίνουσα, δηλ. $\exists \lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$

(b_n): Φραγμένη, φθίνουσα $\Rightarrow$ συγκλίνουσα, δηλ. $\exists \lim_n b_n = b \in \mathbb{R}$

Θέλουμε να βγάλουμε ότι είναι ίσα, αλλά δε γνωρίζουμε πόσο είναι

$b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow b = \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow \underline{a = b}$, $\lim_n a_n = \lim_n b_n$.

Μάθημα 23 (30/11/2012)

Ασκήσεις (... συνέχεια)

7) $a_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots \frac{1}{(n+n)!}$ $\left(a_1 = 1 + \frac{1}{2!},\ a_2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}, \dots\right)$

(Οι όροι εξαρτώνται από το n
Λάθος να πούμε 0+0+...+0)

$0 \le a_n \le \frac{n+1}{n!}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n!} = 0$. Άρα $\lim_n \left(\frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{(n+n)!}\right) = 0$

(Κριτήριο Λόγου $0 < \frac{n+1}{n!} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \to 0$)

8) $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots n^n}$

$1 = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{n} \le a_n \le \frac{1}{n}\sqrt[n]{n \cdot n^n} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n} 1$

Προσοχή !!! Χρησιμοποιώ διωνύμιο δεύτερης τάξεως ή όχι Bernoulli για την $\sqrt[n]{n} = y_n$

Από ισοσυγκλίνουσες $\lim a_n = 1$

9) $a_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}{n^n}$

Γεωμετρική Πρόοδος, βγάζουμε το $n+1$

$\frac{n^n}{n^n} = 1 \le a_n \le \frac{1 + n^2 + n^3 + \dots n^n}{n^n} \overset{*}{=} \frac{n^{n+1} - 1}{n-1}\frac{1}{n^n} = \frac{n^{n+1} - n}{n^{n+1} - n^n} \to 1$

(Γεωμετρική Πρόοδος *
$\gamma^\nu - \delta^\nu = (\gamma - \delta)(\gamma^{\nu-1} + \dots \delta^{\nu-1})$
ή $1 + \theta + \dots \theta^\nu = \frac{\theta^{\nu+1} - 1}{\theta - 1}$)

10) $a \in \mathbb{R}$ $x_n = \frac{[na]}{n}$ Πρέπει να γνωρίζουμε ανισότητες ακεραίου μέρους

$[na] \le na \le [na] + 1$

$x_n = \frac{[na]}{n} < a < x_n = \frac{[na]}{n} + \frac{1}{n}$

$\underset{\xrightarrow{n} a}{a - \frac{1}{n}} < x_n \le a \xrightarrow{n} a$

πχ
$a = \sqrt{2}$, $[\sqrt{2}]$, $\frac{[2\sqrt{2}]}{2}, \dots$
$\lim \frac{[na]}{n} = a$
Όριο Ρητών μπορεί να είναι Άρρητος

Σημείωση: η $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \to a$

11) $\lim_n \sqrt[n]{n!}$ Δύσκολο

$\sqrt[n]{n!} > 0$ $\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty \iff \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$

Παίρνουμε $a_n = \frac{1}{n!}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n} 0$

Από παλαιότερη άσκηση $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$
(σελ 1.14 άσκηση 2)

12) $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, $b_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

$\gamma_n = \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$;;; (Με τύπο Sterling $\lim_n \gamma_n = +\infty$)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow \lim_n a_n = 0$ | $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \to \frac{e}{e} = 1$;;

$\frac{b_{n+1}}{b_n} \to \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow \lim_n b_n = +\infty$

Συναρτήσεις

Στήριγμα ανάλυσης η πληρότητα του $\mathbb{R}$
$A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

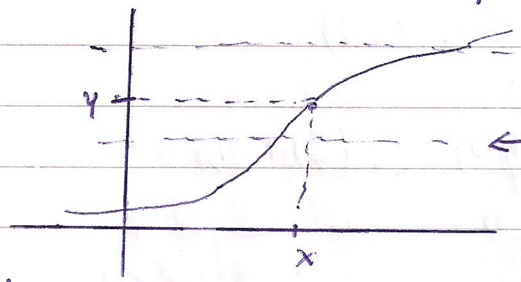
Η έννοια της συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ έχει οριστεί στα "Θεμέλια..

- $f, g : A \to \mathbb{R}$
- $f+g : A \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f): A \to \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ σταθ)
- $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{g} : A \to \mathbb{R}$ $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{g(x)}$

Συνάρτηση "1-1"

Η $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται "1-1" συνάρτηση $\Leftrightarrow$ (αν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$)

$\Leftrightarrow$ ($\forall y \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(y)=$ μονοσύνολο)



← αυτή η ευθεία θα τέμνει μόνο ένα σημείο του γραφήματος

Μονότονες Συναρτήσεις:

1) $f: A \to \mathbb{R}$ αύξουσα (γν. αύξουσα)

$\Leftrightarrow$ $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 > x_2$ τότε $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

2) $f: A \to \mathbb{R}$ φθίνουσα (γν. φθίνουσα)

$\Leftrightarrow$ $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 > x_2$ τότε $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$)

$\Leftrightarrow$ $(-f)$ αύξουσα (γν. αύξουσα)

Σημαντική Παρατήρηση

f αύξουσα (γν. αύξουσα) $\Leftrightarrow$ αν το $x \neq x'$ τότε $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} \geq 0$

(αντίστοιχα $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} > 0$)

Δηλαδή: Αύξουσα $\Leftrightarrow$ η κλίση μεγαλύτερη του μηδενός

Ασκήσεις

1) $c \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=c$, $x \in \mathbb{R}$

Σταθερή Συνάρτηση

Δεν είναι "1-1" π.χ. $f(0)=f(1)=c$, $0 \neq 1$

2) i) $f(x)=\begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

ii) $g(x)=\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (Dirichlet) Χαρακτηριστική Συνάρτηση Ρητών

Δεν είναι "1-1" π.χ. $f(0)=f(1)=1$

$1 \neq 0$

3) $f(x)=x^2,\ x\in[0,+\infty)$ / $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$

$x\neq x'$, $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=\frac{x^2-(x')^2}{x-x'}=x+x'>0$ Γνησίως Αύξουσα

Έστω $y\in[0,+\infty)$, τότε υπάρχει (ακριβώς ένας) $x\in[0,+\infty)$ με $x=\sqrt{y}$

Συνεπώς $x^2=y$, $f(x)=y$ / Άρα $[0,+\infty)\subseteq f([0,+\infty))$

$f([0,+\infty))\subseteq[0,+\infty)$

Τελικά $f([0,+\infty))=[0,+\infty)$

4) $f:A\to\mathbb{R}$ γν. αύξουσα (ή γν. φθίνουσα)

Τότε η f "1-1"

$f(x_1)=f(x_2)$ ($x_1,x_2\in A$) Τότε για $x_1,x_2\in A$ ($\subseteq\mathbb{R}$) ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής (αρχή τριχοτομίας)

$x_1<x_2 \xrightarrow{f\uparrow} f(x_1)<f(x_2)$ Αποκλείεται $f(x_1)=f(x_2)$

$x_2>x_1 \xrightarrow{f\uparrow} f(x_2)<f(x_1)$ Αποκλείεται $f(x_1)=f(x_2)$

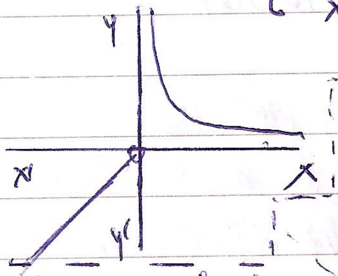
άρα $x_1=x_2$ / Άρα η f είναι 1-1

5) Εάν $f:A\to\mathbb{R}$ "1-1" $\not\Longrightarrow$ f γν. αύξουσα (ή γν. φθίνουσα) στο A

πχ. $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ \frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$

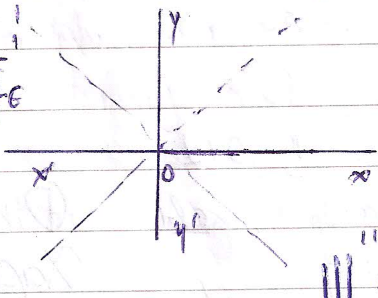
"1-1", ούτε φθίνουσα, ούτε αύξουσα

Αλλά είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της



• Sosais! $g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ -x, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Ας θεωρήσουμε ότι είναι έτσι η απεικόνιση των



Είναι συνεχής μόνο στο μηδέν

"1-1", δεν ∃ διάστημα $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνήσια μονότονη στο (a,b)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ μ $g(x_1) = g(x_2)$ πρέπει νδο $x_1 = x_2$

~~Από Αρχή Τριχοτομίας~~

$\rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_1 = x_2$

$\rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\rightarrow x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \notin \mathbb{Q} \quad x_1 = -x_2$ Άτοπο (διότι $x_1 \in \mathbb{Q}$, $-x_2 \notin \mathbb{Q}$)

Άρα η g είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$. //

$\boxed{\text{Μάθημα 24 (3-12-2012)}}$

<u>Οι συναρτήσεις που παράγουν τις άλλες "γνωστές" συναρτήσεις</u>
(μέσω πράξεων ή αντίστροφης)

(I) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$ $x \in \mathbb{R}$

- Παράγει τις σταθερές συναρτήσεις $f = \lambda \cdot f_1$ $\lambda \in \mathbb{R}$

(II) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ η λεγόμενη ταυτοτική

Παράγει όλα τα πολυώνυμα $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$

Πολυώνυμα n-βαθμού ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$)

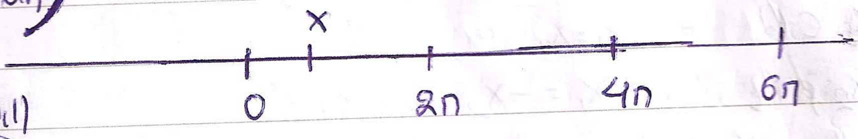
$$\frac{P(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0}{Q(x) = b_\nu x^\nu + \dots b_1 x + b_0} \quad \text{με } x \in A = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

Εάν πάρουμε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^n$,
όπου n = σταθερό τότε η συνάρτηση αυτή εδώ έχει ως
πεδίο τιμών $g(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) = [0, +\infty)$ γτ υπάρχει $x > 0$:
$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$. Ύπαρξη n-ρίζας του $a > 0$
Το $g(\mathbb{R} \cup \{0\})$ είναι επί του $[0, +\infty)$ εφόσον 1-1.
Ορίζεται το $g^{-1} [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $g^{-1}(a) = \sqrt[n]{a}$ η αντίστροφη

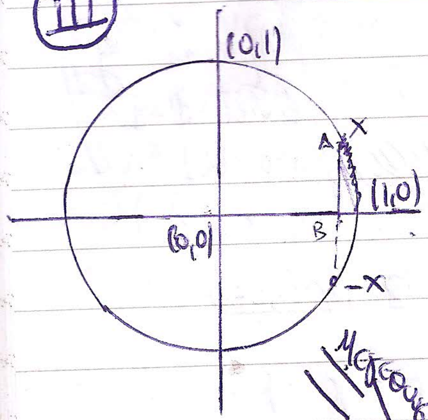
Αν $P_n(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ n = σταθερό
Δεν έχουμε τη δυνατότητα να την υπολογίσουμε πουθενά (Γενικά!)
Μόνο να βρούμε τις τιμές της ακριβώς όταν έχουμε <u>ρητούς</u> συντελεστές μπορούμε και όταν ο x παίρνει <u>ρητές τιμές</u>
δηλ $x \in \mathbb{Q}$, $a_i \in \mathbb{Q}$
Αλλιώς σε καμία άλλη συνάρτηση δεν μπορούμε να την υπολογίσουμε

ακριβώς. Η μόνη συνάρτηση που συμβαίνει (ίσων και) αυτό είναι η [illegible]

x>0

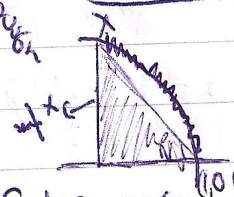


III



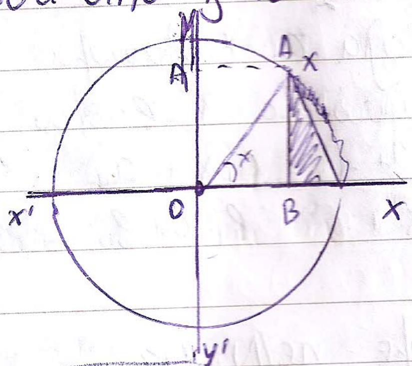
Το μήκος της περιφέρειας είναι 2π
Το κατσαρωτό μέρος - μήκος δε μπορούμε να το μετρήσουμε. Το ύψος (AB) είναι το $f_3(x) = ημ(x)$

Μεγέθυνση



Συνεπώς $ημx \leq 1$
και $ημx \leq x$

$ημ(-x) = -ημx$ διότι έχει "μεταφερθεί από κάτω"
Επομένως $|ημx| \leq 1$
$|ημx| \leq |x| \quad x \in \mathbb{R}$



$συνx = ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) = |OB|$
$ημx = |AB|$

$|OB|^2 + |AB|^2 = |OA|^2, \quad |OA| = 1, \quad \boxed{συν^2x + ημ^2x = 1}$

$\boxed{ημ(α+β) = ημα \cdot συνβ + ημβ\, συνα}$ Απόδειξη Ευκλείδιας Γεωμετρίας
Όλες οι υπόλοιπες έρχονται από αυτή
Να διαβάσουμε απόδειξη από το βιβλίο Β Λυκείου (και Φροντιστήριο)
(google Hanagadend)

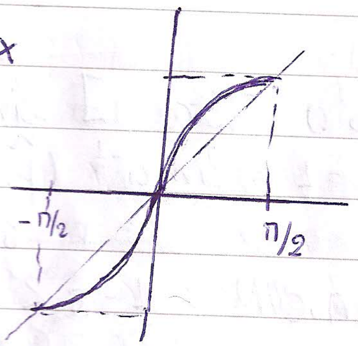
Ορίζεται $εφx = \frac{ημx}{συνx}$, $συνx \neq 0$

$ημ: \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right] \to [-1, +1]$ από ορισμό του είναι "1-1" και επί

∃ η αντίστροφη $(ημ)^{-1} =:$ τόξο $ημ[-1,1] \to \left[-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right]$

Ανάλογα τοξ συx, τοξ εφx

Για την $(εφ)^{-1}$ το διπλώνω ως προς την διχοτόμο.



(IV) $a>0$ (σταθερό)

Θέλουμε να ορίσουμε την $f_a(x)=a^x$, $x\in\mathbb{R}$

Αν $a=1$, $f_a(x)=1^x=:1$ από ταυτοτική, $x\in\mathbb{R}$

Εάν οριστεί για $a>1$ τότε $0<b<1$ ή $b^x=\left(\frac{1}{b}\right)^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

Τελικά αρκεί να οριστεί η $f_a(x)=a^x$ για $a\geq 1$

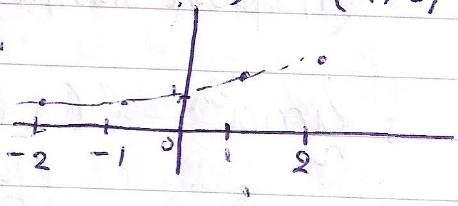
Για ποιά σύνολα $A\subseteq\mathbb{R}$ έχει οριστεί το a^x, $x\in A$;;;;

- $A=\mathbb{N}$, $a^0=:1$, $a^1=:a$, $a^{n+1}=a^n\cdot a$

Ιδιότητες (Ε)

$$\begin{cases} f(0)=1,\ f(m+n)=f(m)\cdot f(n) \quad m,n\in\mathbb{N} \\ m,n\in\mathbb{N},\ m>n \Leftrightarrow f(m)=a^m>a^n=f(n) \quad (a>1) \end{cases}$$

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα



- $A=\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$, $m\notin\mathbb{N}\Rightarrow -m\in\mathbb{N}$, $a^m=\frac{1}{a^{-m}}$

- $A=\mathbb{Q}$ $\quad p=\frac{m}{n}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ Ισχύουν οι (Ε) για $m,n\in\mathbb{Z}$

$f(p)=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ Ισχύουν οι ιδιότητες (Ε) για $p,q\in\mathbb{Q}$.

Πώς θα οριστεί το a^x για $x\in\mathbb{R}$;
Εδώ πρέπει να αναλογιστούμε τη συνδέση των ρητών με τους πραγματικούς και θα καταλήξουμε στην Πυκνότητα.

Ισχυρισμός 1

Έστω $p_n \in \mathbb{Q}$, $p_n \xrightarrow[n]{} 0$ Τότε $\exists \lim_n a^{p_n} = 1$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_n a^{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_n a^{-\frac{1}{n}}$ (φαίνονται ξ στην απόδειξη σελίδα σελ 96)

Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1+\varepsilon$ (1)

$a^{(\cdot)} \nearrow$ στο $\mathbb{Q}$

$\lim_n p_n = 0$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{n_0} > 0$ $\quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}$:

$-\frac{1}{n_0} < p_n < \frac{1}{n_0}$, $n \geq N_0$

Τότε ($a^{(\cdot)} \nearrow$ στο $\mathbb{Q}$) $a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{p_n} < a^{\frac{1}{n_0}}$ $\quad n \geq N_0$ (2)

Συνεπώς $n \geq N_0$ (1),(2) $1-\varepsilon < a^{p_n} < 1+\varepsilon$

Επομένως $\exists \lim_n a^{p_n} = 1$

Ισχυρισμός 2

Έστω $x \in \mathbb{R}$, και $b_1 \leq b_2 \dots \leq b_n \leq \dots < x$

με $b_n \in \mathbb{Q}$, $\lim_n b_n = x$ δηλ $b_n \to x$ ~~(x x) +~~

(παίρνουμε διαστήματα ξ βρίσκουμε μέσα ένα b_n, Άσκηση που έχει γίνει)

Τότε $\exists \lim_n a^{b_n} = \ell(x, (b_n)_n) \in \mathbb{R}^+$ εξαρτάται

$(a^{b_n})_n$ με a^{b_n} ($b_n \in \mathbb{Q}$) $\nearrow$ αφού $b_n \nearrow$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι άνω φραγμένη

Για το x $\exists\, k \in \mathbb{N}$: $x < k$

$a^{b_n} < a^{k} = M$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$(a^{b_n})_n$ φραγμένη

Αφού αύξουσα ξ φραγμένη $\exists \lim_n a^{b_n} > a^{b_1} > 0$

Ισχυρισμός 3

Εάν $(\gamma_n)_n \nearrow$, $(\delta_n)_n \nearrow$ στο $\mathbb{Q}$ τότε $\lim_n a^{\gamma_n} = \lim_n a^{\delta_n} = \ell(x)$

ξ $\gamma_n \to x$, $\delta_n \to x$ (Δεν εξαρτάται από τις γ_n, δ_n)

$\gamma_n - \delta_n \xrightarrow[n]{} 0$ Επομένως από τον Ισχυρισμό 1 $\Rightarrow a^{\gamma_n - \delta_n} \xrightarrow[n]{} 1$

$(\delta_n)_n \nearrow$, $\delta_n \to x \xRightarrow{\text{Ισχ 2}} a^{\delta_n} \xrightarrow[n]{} \ell(x, (\delta_n)_n) > 0$

Άρα $\exists \lim_n (a^{\gamma_n - \delta_n} \cdot a^{\delta_n}) = \ell(x, (\delta_n)_n)$.

(από τις ιδιότητες στο $\mathbb{Q}$) $\lim_n a^{\gamma_n} = \ell(x, (\delta_n)_n)$ $\Rightarrow \ell(x, (\gamma_n)) = \ell(x, (\delta_n))$

Ισχυρισμός 4

$x_n \in \mathbb{Q}$ (τυχαία) $x_n \xrightarrow[n]{} x$

τότε $\exists \lim_n a^{x_n} = \ell(x)$ (του Ισχυρισμού 3)

Για το $x \in \mathbb{R}$, $\exists\, b_n \in \mathbb{Q}$, $(b_n)_n \nearrow$, $b_n < x$, $b_n \to x$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τότε } b_n - x_n \xrightarrow[n]{} 0_{\in \mathbb{Q}} \xRightarrow{\text{Ισχ 1}} a^{x_n - b_n} \Rightarrow 1 \\ (\text{Ισχ. 2 } \xi \text{ Ισχ. 3}) \ \exists \lim_n a^{b_n} = \ell(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_n a^{x_n} = \ell(x)$$

Ορισμός a^x, $x \in \mathbb{R}$ $(a > 1)$

$x \in \mathbb{R}$. Τότε για τυχαία ακολουθία $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \to x$ το $\lim_n a^{x_n} = \ell(x) \in \mathbb{R}^+$ <u>δεν</u> εξαρτάται από την $(x_n)_n$

Ορίζουμε $a^x = \lim_n a^{x_n}$

(Ορίζεται και για $0 < a < 1$) Ισχύουν

1) $a > 1$, $f(x) = a^x$ γν. αύξουσα

2) $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ γν. φθίνουσα

Επίσης ισχύουν $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $x, y \in \mathbb{R}$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$b > 0$, $(a \cdot b)^x = a^x b^x$ $x \in \mathbb{R}$

(από τις ιδ. που ισχύουν για $x, y \in \mathbb{Q}$ και τον ορισμό της a^x, a^y)

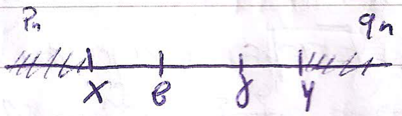
Απόδειξη:

1) $\underline{a>1}$ $(x<y \Rightarrow a^x < a^y$ πρέπει να αποδειχθεί$)$

$\beta, \gamma \in \mathbb{Q} \quad x<\beta<\gamma<y$

Έστω $p_n \nearrow$, $p_n \in \mathbb{Q}$ $p_n \to x$

$q_n \searrow$, $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \to y$



$\lim a^{p_n} = \underset{\rightarrow}{a^x} \le a^\beta < a^\gamma \le \lim a^{q_n} = a^y$

$p_n < \beta$ $(\beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $a^{(\cdot)} \nearrow)$

>> Έτσι a^x αύξουσα, θετική έχει όλες τις καλές ιδιότητες όταν αντιστρέφεται σε γέρασμα πεδίο τιμών, όπως για να το βρούμε κάνουμε χρήση Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών κτλ

$\boxed{\text{Μάθημα 25 (4/12/2012)}}$

Συνέχεια Συνάρτησης

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ $\boxed{x_0 \in A}$

1) Η f συνεχής στο $x_0 \in A \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow}$ για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$: για κάθε $x \in A$ με $|x-x_0|<\delta$ έπεται $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$: για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ έπεται $f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$

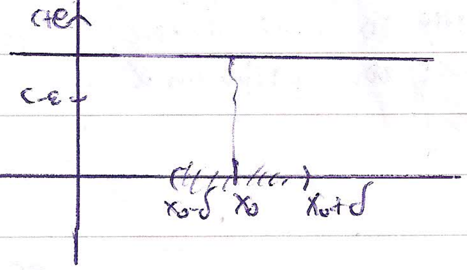
2) Η f είναι συνεχής στο $A \overset{\text{ορισμ.}}{\Longleftrightarrow}$ η f είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in A$

Άρνηση ορισμού

Η f ασυνεχής στο $\underline{x_0 \in A} \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon_0>0$: για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x_\delta \in A$ με $|x_\delta - x_0|<\delta$ και $|f(x_\delta)-f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

Ασκήσεις (με ε-δ ορισμό)

1) $f(x)=c$, $x \in \mathbb{R}$ Να αποδειχθεί ότι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$

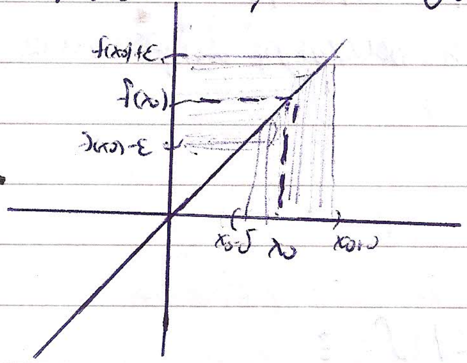


Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$

Τυχαίο $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| = |c-c|$
$= 0 < \varepsilon$

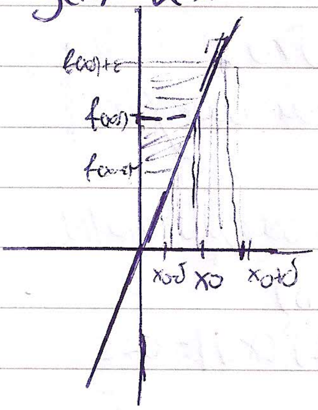
Όσο μεγάλο δ και να πάρουμε (αφού για δ όλα τα $\in\mathbb{R}^+$) θα πέσει στο $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ και πιο συγκεκριμένα στο c.
Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Στη συγκεκριμένη το δ <u>είναι ανεξάρτητο από το ε και το x_0</u>.

2) $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ Να αποδείξετε ότι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$



Παίρνουμε $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$.
Να βρούμε ένα δ τέτοιο ώστε ένα x να πέσει στο διάστημα
$\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$ Αν $|x-x_0|<\delta$ τότε
$|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0|<\delta=\varepsilon$

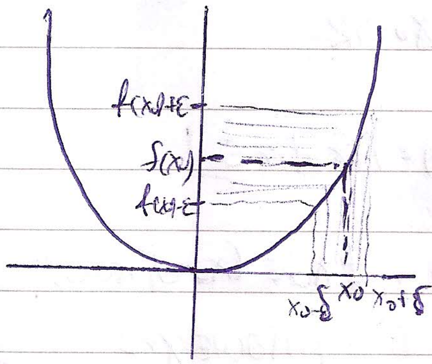
$g(x)=2x$



$\varepsilon>0$, $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$
Αν $|x-x_0|<\delta$
τότε $|f(x)-f(x_0)| = 2|x-x_0|<2\delta=\varepsilon$

Το δ <u>εδώ</u> <u>εξαρτάται</u> <u>από</u> το <u>ε</u>, <u>όχι</u> όμως <u>από</u> <u>το x_0</u>

3) $f(x)=x^2$ $x\in\mathbb{R}$



$x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ (τα σταθεροποιήσαμε)
Πρέπει να βρούμε ένα δ όπου μέσω της f να πέφτει στο $(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$
• Περιμένουμε ένα δ που να εξαρτάται από το ε και από το x_0

$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\} > 0$ (εξαρτάται από το ε και από το x_0)

Αν $|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ελέγχουμε

αν $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |x^2-x_0^2| = |x+x_0|\underbrace{|x-x_0|}_{} < (1+2|x_0|)|x-x_0| < (1+2|x_0|)\delta \le \varepsilon$

Πρέπει να βρούμε δ ώστε $|x+x_0|$ να φράσσεται:

$|x+x_0| = |x+x_0-x_0+x_0| \le |x-x_0|+2|x_0| < 1+2|x_0|$

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Έστω ότι $\exists M>0 : |f(x)-f(y)|\le M|x-y|$

» Ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz

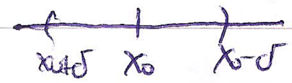
Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, $\delta=\frac{\varepsilon}{M}>0$ (Δεν εξαρτάται από το x_0)

$|f(x)-f(y)|\le\varepsilon$

Αν $|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)-f(x_0)|\le M|x-x_0|<M\delta=\varepsilon$

5) i) $f:A\to\mathbb{R}$ Έστω ότι για το $x_0\in A$ υπάρχει $\delta>0$: $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A=\{x_0\}$ Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 *



ii) Κάθε ακολουθία $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{N}$

ε>0. Για το $\delta_0>0$ (της υπόθεσης)

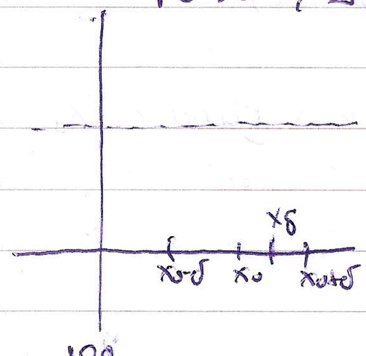
Έχουμε: αν $\underbrace{x\in A,\ |x-x_0|<\delta_0}_{\Rightarrow x=x_0}$ τότε $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$

6) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ (Dirichlet)

Ασυνεχής για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$

$x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$

$\forall\delta>0,\ \exists x_\delta\in\mathbb{R} : |x_\delta-x_0|<\delta$ ενώ $|f(x_\delta)-f(x_0)|\ge\varepsilon$



$x_0\in\mathbb{Q}$, $f(x_0)=1$ Για $\delta>0$, $\exists x_\delta\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ με $x_\delta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$|f(x_\delta)-f(x_0)|=|0-1|=1>\varepsilon=\frac{1}{2}$ / Ασυνεχής $\forall x_0\in\mathbb{Q}$

$x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f(x_0)=0$. Για $\delta>0$ $\exists\, x_\delta \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x_\delta \in \mathbb{Q}$

$|f(x_\delta)-f(x_0)|=1>\varepsilon=\frac{1}{2}$ Ασυνεχής $\forall x_0 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Ασυνεχής λοιπόν $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

$f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Τα εξής είναι ισοδύναμα (Τ.Ε.Ε.Ι)

(I) i) f συνεχής στο x_0

ii) Για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ με $\lim_n x_n = x_0$ έπεται ότι $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

(II) i) η f ασυνεχής στο x_0

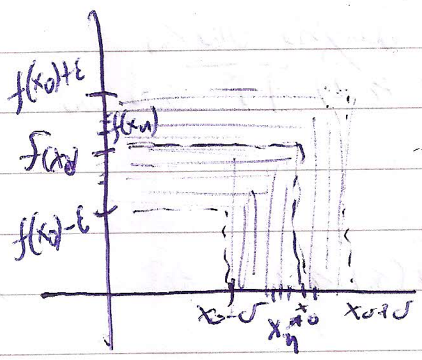
ii) Υπάρχει $x_n \in A$ με $\lim_n x_n = x_0$ ενώ $\lim_n f(x_n) \neq f(x_0)$

Απόδειξη: (I) i) $\Rightarrow$ ii) Έστω $\varepsilon>0$

Η f συνεχής στο x_0. $\exists\, \delta>0$: αν $x\in A$ και $|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (1)

Έστω $x_n \in A$ με $\lim_n x_n = x_0$ Θα αποδείξουμε ότι $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $|x_n - x_0| < \delta$ για $n \geq n_0$ (2)



Άρα, από (2),(1) $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$ για $n \geq n_0$

Συνεπώς $\lim_n f(x_n) = f(x)$

ii) ⇒ i) Έστω ότι ισχύει το ii) αλλά η f ασυνεχής στο x_0

Τότε $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in A$ με $|x_\delta - x_0| < \delta$

ενώ $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

$n \in \mathbb{N}$ (σταθερό) $\delta = \frac{1}{n} > 0 \quad \exists x_n \in A : |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$

$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

Δημιουργήθηκε ακολουθία (στοιχεία του A με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$

και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

Άρα $\exists x_n \in A$ $n \in \mathbb{N}$ με $\lim_n x_n = x_0$ ενώ $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

Άτοπο (από την υπόθεση $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$)

<u>Πού χρησιμοποιούμε την Αρχή της Μεταφοράς;</u>

1) Για να αποδείξουμε ανάλογες ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.

2) Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η f ασυνεχής σε ένα σημείο

<u>Πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων</u>

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Οι f, g <u>συνεχείς στο x_0</u>

Τότε i) η $f+g$ συνεχής στο x_0

ii) για $\lambda \in \mathbb{R}$, η $\lambda \cdot f$ συνεχής στο x_0

iii) $f \cdot g$ συνεχής στο x_0

iv) Εάν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$ τότε η $\frac{f}{g}$ συνεχής στο x_0

v) η $|f| : A \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$ $x \in A$ συνεχής στο x_0

vi) Έστω $f(x) \geq 0$ και k = σταθερό ($\in \mathbb{N} \geq 2$) $\sqrt[k]{f}$ συν στο x_0

<u>Απόδειξη:</u> vi) Έστω $x_n \in A$ με $x_n \to x_0$

(α τρόπος) f συνεχής στο $x_0 \xrightarrow{AM} f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(x_0) \geq 0$

Άρα $\sqrt[k]{f(x_n)} \xrightarrow[n]{} \sqrt[k]{f(x_0)}$

Άρα από την αρχή της Μεταφοράς η $\sqrt[k]{f}$ συνεχής στο x_0

(β τρόπος) Με ε-δ ορισμό.

Σύνθεση Συνεχών Συναρτήσεων

$f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$

$g: f(A) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $f(x_0)$

Τότε η $g \circ f$ συνεχής στο x_0.

Απόδειξη: Αρχή Μεταφοράς ή ε-δ ορισμό.

Ασκήσεις * *

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(p)=0$ για $\forall p \in \mathbb{Q}$
Τότε $f(x)=0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Σημαντική!!

—

$x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε $\exists\, p_n \in \mathbb{Q}$ με $p_n \xrightarrow{n} x_0$

Η f συνεχής στο x_0 $\overset{AM}{\Longrightarrow}$ $f(p_n)=0 \xrightarrow{n} f(x_0)$ Άρα $f(x_0)=0$

2) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $f(a)=g(a)$ $\forall a \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$
Τότε $f(x)=g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

3) Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(q)=q^2$, $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$
f συνεχής στο $[0,1]$
Να υπολογιστούν οι τιμές της $f\left(\frac{e}{5}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{114}}\right)$

Η f συνεχής στο $[0,1]$ ταυτίζεται με την $g(x)=x^2$ στους ρητούς
Άρα $f(x)=x^2$ $\forall x \in [0,1]$

$f\left(\frac{e}{5}\right) = \frac{e^2}{25}$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi^2}{64}$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{114}}\right) = \frac{2}{114}$ (Θέμα Γιαννόπουλου)

|| Όταν δύο συνεχείς συναρτήσεις ταυτίζονται στους ρητούς, θα ταυτίζονται (ή στους άρρητους) και στους άρρητους (ρητούς), από πυκνότητα. ||

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ $x \in \mathbb{R}$

Να αποδειχθεί ότι η f σταθερή

$x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^2}\right) = \dots f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$

$f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$ / $\frac{x_0}{2^n} \xrightarrow[n]{} 0 \overset{AM}{\Longrightarrow} f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \xrightarrow[n]{} f(0)$

Άρα $f(x_0) = f(0)$

$f(x) = f(0)$ $x \in \mathbb{R}$

5) $f: \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \cup \{0\} = A \to \mathbb{R}$

με $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$ Να ευρεθεί το $f(0)$ ώστε η f να γίνει συνεχής στο $x_0 = 0$

$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$

$f(x_n) \xrightarrow[n]{} f(0)$

$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n]{} f(0) \\ \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n]{} 1 \end{array}\right\}$ Από μοναδικότητα ορίου ([illegible])

$f(0) = 1$

Μάθημα 26

Συνέχεια Συνάρτησης

$f: A \to \mathbb{R}$, $\boxed{x_0 \in A}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$

• Η f συνεχής στο $x_0 \overset{op}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$:

για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ έπεται ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Η f συνεχής στο $A \Longleftrightarrow$ η f συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$

Αρχή της Μεταφοράς

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ Τα εξής είναι ισοδύναμα

i) η f συνεχής στο x_0

ii) για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ του A με $\lim_n x_n = x_0$ έπεται ότι $\lim f(x_n) = f(x_0)$

$\boxed{\text{• Συνέχεια των βασικών συναρτήσεων } f_1(x)=1,\ f_2(x)=x,\ f_3(x)=ημx,\ f_4(x)=a^x\ (\alpha>0)}$

1) $f_1(x)=1\quad \forall x\in\mathbb{R}$
$x_0\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$. Τότε για (τυχαίο) $\delta>0$ έχουμε αν $|x-x_0|<\delta$
τότε $|f(x)-f(x_0)|=|1-1|=0<\varepsilon$
Άρα η f_1 είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$

2) $f_2(x)=x,\quad x\in\mathbb{R}$
$x_0\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$. Για $\delta=\varepsilon>0$ ισχύει αν $|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)-f(x_0)|=$
$=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$
Άρα η f_2 είναι συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$

3) $f_3(x)=ημx,\ x\in\mathbb{R}$
Τύπος τριγωνομετρίας: $\boxed{ημa-ημb=2ημ\left(\frac{a-b}{2}\right)συν\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ (βλ. φροντ.)
$x_0\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon>0$
$\delta=\varepsilon>0$ τότε αν $|x-x_0|<\delta$ έχουμε
$|ημx-ημx_0|=2\left|ημ\frac{(x-x_0)}{2}\right|\left|συν\frac{(x+x_0)}{2}\right|\leq 2\left|ημ\frac{(x-x_0)}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$
$=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$

4) $f_4(x)=a^x\quad (a>0,\ a=σταθερό)\quad x\in\mathbb{R}$
Έστω ότι $a>1$. Τότε $f_4(x)=a^x$ γνησίως αύξουσα
Γνωρίζουμε ότι $\lim\sqrt[n]{a}=1=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
δηλαδή $\lim\limits_n a^{\frac{1}{n}}=1=\lim\limits_n a^{-\frac{1}{n}}$
$a^{-\frac{1}{n}}<a^{\frac{1}{n}}\quad (a>1)\quad (1)$

Σημείωση:
$x_n\to 0$
$a^{x_n}\to 1$ σελ. 129
$x_n=\frac{1}{n}$

• Έστω $\varepsilon>0$. Θα αποδείξουμε ότι $f_4(x)=a^x$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ ($\exists\ \delta>0$: αν $|x-0|=|x|<\delta$ τότε $|a^x-a^0(=1)|<\varepsilon$

Επειδή ισχύει η (1), $\exists\ n_0\in\mathbb{N}$: $1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon$ (2)
$\delta=\frac{1}{n_0}>0$ και $|x-0|=|x|<\frac{1}{n_0}\Rightarrow -\frac{1}{n_0}<x<\frac{1}{n_0}$

Άρα, επειδή ($a^x \uparrow$) $a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}}$ για $|x| < \frac{1}{n_0}$ (3)

Επομένως για $|x| < \delta = \frac{1}{n_0}$, έπεται (από (3),(2)) $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$
δηλ. αν $|x| < \delta = \frac{1}{n_0} \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$. Άρα η $f_4(x) = a^x$ συνεχής στο $x_0 = 0$

- Θα αποδείξουμε ότι η f_4 είναι συνεχής σε τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$
'Εστω $x_n \xrightarrow[n]{} x_0 \Rightarrow x_n - x_0 \xrightarrow[n]{} 0 \overset{AM}{\Longrightarrow} f_4(x_n - x_0) \longrightarrow f(0) = 1$
δηλ $a^{x_n - x_0} \xrightarrow[n]{} 1 \Rightarrow a^{x_0}(a^{x_n - x_0}) \xrightarrow[n]{} a^{x_0}$
$\Rightarrow a^{x_n} \xrightarrow[n]{} a^{x_0}$ ($f_4(x_n) \to f_4(x_0)$)

Από την Αρχή της Μεταφοράς, η f_4 συνεχής στο x_0

Για $0 < a < 1$, $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, $\frac{1}{a} > 1$ Συνεχής από προηγούμενα]

Ερώτημα
Για την $f_4(x) = a^x$ $x \in \mathbb{R}$ ($a \neq 1, a > 0$), ποιο είναι το $f(\mathbb{R})$;

Από την συνέχεια των συναρτήσεων $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \eta\mu x$, $f_4(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) συμπεραίνουμε την συνέχεια "πολλών συναρτήσεων" (Μέσω πράξεων σύνθεσης κλπ)

πχ $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$)
Συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots a_1 x + a_0}{b_\nu x^\nu + \dots b_1 x + b_0}$ (πχ $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2+1}, \frac{1}{x^2 - 1} \dots$)
Συνεχής στο Πεδίο Ορισμού, δηλ εκεί που δε μηδενίζεται το $Q(x)$)

$\eta\mu(x^5 + 8x^3 + 2^{x^{10}} + 1) + \frac{1}{x^2 + x + 8} e^{\frac{x^3 + x^2}{x^4 + 15x^2 + 11}} + \dots$ Συνεχής στο Π.Ο της

Τοπική Συμπεριφορά Συνεχούς Συνάρτησης στο $x_0 \in A$

$f: A \to \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$, $B \subseteq A$

$\mathcal{F}: B \to \mathbb{R}$ με $\mathcal{F}(x) = f(x)$ για $x \in B$

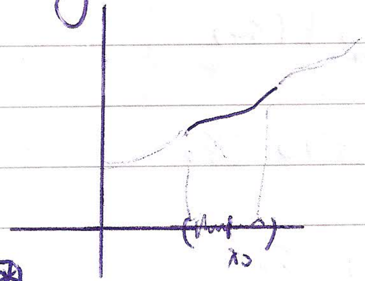
Η $\mathcal{F} =: f|_B$ (f περιορισμένη στο B) καλείται ο περιορισμός της f στο B

Ισχύουν τα εξής

1) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in B \subseteq A$

Εάν η f συνεχής στο x_0 $(\in A)$ $\Rightarrow$ (η f περιορισμένη στο B) δηλ η $f|_B$ είναι συνεχής στο $x_0 \in B$

Δηλαδή η συνέχεια μιας f στο x_0 είναι τοπική συμπεριφορά



$b_n \in B$ $(\subseteq A)$, $b_n \to x_0 \in B$ $(\subseteq A)$

f συνεχής στο x_0 $\overset{AM}{\Longrightarrow}$ $f(b_n) \underset{n}{\longrightarrow} f(x_0)$

Άρα $f|_B$ είναι συνεχής στο $x_0 \in B$. ∎

(**) 2) $f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0, $f(x_0) > 0$

Τότε $\exists\ \delta > 0$: αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ τότε $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$

$\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ Η f συνεχής στο x_0 $\Rightarrow \exists\ \delta > 0$:

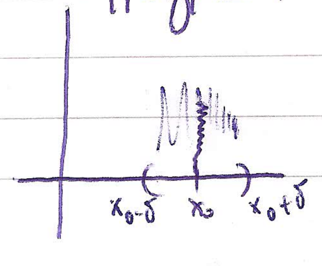
αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ τότε

$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = \left(\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3f(x_0)}{2}\right)$

Άρα αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ τότε $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$

(**) 3) $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0, τότε $\exists\ M_{x_0} > 0$ και $\delta > 0$: αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ τότε $|f(x)| \leq M_{x_0}$

Δηλαδή η f τοπικά φραγμένη συνάρτηση



$\varepsilon = 1 > 0$. Η f συνεχής στο $x_0 \in A$
Άρα $\exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$
τότε $|f(x) - f(x_0)| < 1$

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ τότε $|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 = M_{x_0}$

Σημείωση: $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής για κάθε $x_0 \in A$ τότε
είναι τοπικά φραγμένη σε κάθε $x_0 \in A$.

Ασκήσεις Σωστού - Λάθους

1) i) η f συνεχής στο $x_0 \in A \Rightarrow$ η $|f|$ συνεχής στο x_0
Σωστό: $a_n \in A$, $a_n \xrightarrow[n]{} x_0 \xRightarrow{AM} f(a_n) \xrightarrow[n]{} f(x_0)$
$\xRightarrow{\text{Από}}$ $|f(a_n)| \to |f(x_0)|$.
Ακολουθίες σελ 80
Από Α.Μ. η $|f|$ συνεχής στο x_0

ii) $|f|$ συνεχής στο $x_0 \Rightarrow$ η f συνεχής στο x_0
Λάθος
• $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$|f|(x) = 1$ συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$
ενώ f ασυνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}$:
- $x_0 \in \mathbb{Q}$ $\exists\ y_n \notin \mathbb{Q}$ $y_n \to x_0$ τότε $f(y_n) = -1 \not\to f(x_0) = 1$. Από ΑΜ ασυνεχής
- $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\exists\ p_n \in \mathbb{Q}$ $p_n \to x_0$, τότε $f(p_n) \to 1$ $\not\to f(x_0) = -1$

Ασυνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$

• Άλλο - διαφορετικό Παράδειγμα

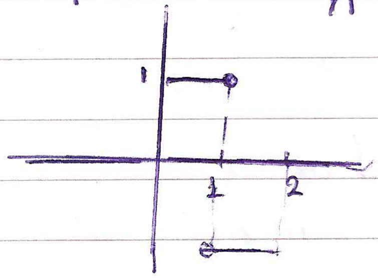
$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ -1, & x = 0 \end{cases}$ $|f|$ συνεχής, f ασυνεχής στο $x_0 = 0$

iii) f^2 συνεχής στο $x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0
Λάθος! (τα παραδείγματα του iii)

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f|_{\mathbb{Q}}$ συνεχής, $f|_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ συνεχής
Τότε η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

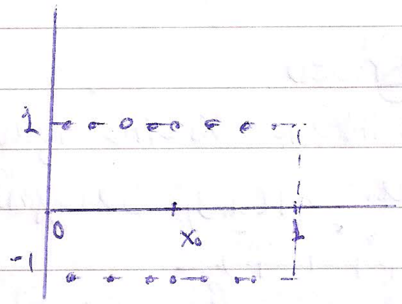
Λάθος! $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

3) $f: [0,2] \to \mathbb{R}$, $f|_{[0,1]}$ συνεχής, $f|_{[1,2]}$ συνεχής
Τότε η f συνεχής στο $[0,2]$
Λάθος! πχ $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ -1 & x \in (1,2] \end{cases}$



Μάθημα 27 (7/12/2009)
Ασκήσεις Σ/Λ (... συνέχεια)

4) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη ($f([0,1]) \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο)
Τότε $\exists\ x_0 \in [0,1]$ ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0.
Λάθος
$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$



και η f είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in [0,1]$
Ερώτημα - Υπενθύμιση
Πώς αποδεικνύω ότι είναι ασυνεχής;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ και $f(0)=1$
Τότε $\exists\ \delta>0$: αν $|x|<\delta$ τότε $\exists$ $f(x)>\frac{4}{5}$

Σωστό! Για $\varepsilon=\frac{1}{5}$, f συνεχής στο $x_0=0 \Rightarrow \exists\ \delta>0: |f(x)-f(0)|<\frac{1}{5}$
για $|x-0|=|x|<\delta$

$(|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\frac{1}{5}) \Rightarrow (|x|<\delta \Rightarrow -\frac{1}{5}<f(x)-1<\frac{1}{5})$
$\Rightarrow (|x|<\delta \Rightarrow f(x)>\frac{4}{5})$

» Επιλέγω το ε γτ γνωρίζω
ότι στις συνεχ. συναρτήσεις για
οποιοδήποτε ε υπάρχει δ που
να απεικονίζεται στο σχήμα

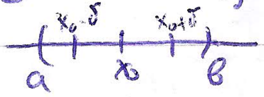
6) $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(q)=2$ $q\in\mathbb{Q}\cap[0,5]$
Τότε $f(\sqrt{2})=2$

Σωστό
$p_n\in\mathbb{Q}\cap[0,5]$, $p_n\to\sqrt{2} \xRightarrow[AM]{f\ \text{συνεχ}} f(p_n)=2 \xrightarrow[n]{} f(\sqrt{2})$ | $f(\sqrt{2})=2$

» Με αυτή θα σημειώσαμε όλες τις προηγούμενες

• Ασκήσεις

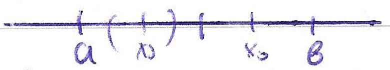
1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ και $\exists\ a,b\in\mathbb{R}: a<x_0<b$
και $f|_{(a,b)}$ συνεχής στο x_0. Τότε η f συνεχής στο x_0 | **



$\varepsilon>0$, $f|_{(a,b)}$ στο x_0 $\exists\ \delta>0$, τέτοιο ώστε
εάν $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq(a,b)$ τότε
$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Άρα η f συνεχής στο x_0

Σημείωση: Για το $x_0\in(a,b)$
καταφέραμε ότι
πάντοτε $\exists$ ένα άλλο
διάστημα ώστε να $\exists$
μέσα του το x_0
$\boxed{138}$ και $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq(a,b)$

• Αν ήταν από σημείο κάτω $\delta=x_0-a>0$ $\left(x_0<\frac{a+b}{2}\right)$



• Αν ήταν από σημείο πάνω $\delta=b-x_0>0$ $\left(x_0>\frac{a+b}{2}\right)$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$. Η f συνεχής στο $x_0=0 \iff |f|$ συνεχής στο $x_0=0$.

$(\Rightarrow)$ $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$: αν $|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$

Άρα για $|x|<\delta$ $\big||f(x)| - |f(0)|\big| < \varepsilon$

$|f|$ συνεχής στο $x_0=0$.

$(\Leftarrow)$ Ανάλογα

ή Από Αρχή Μεταφοράς $(\Rightarrow)$ $x_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to 0 = f(0)$

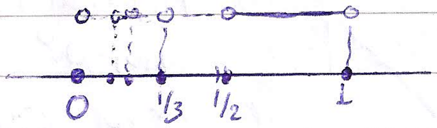
$\Rightarrow |f(x_n)| \to 0$

$(\Leftarrow)$ $x_n\to 0$ $|f(x_n)| \xrightarrow[n]{} 0$

$\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n]{} 0 = f(0)$

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & x\in A\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\} \\ 1 & x\in[0,1]-A \end{cases}$

- Η f ασυνεχής στα $x_0\in A$
  αλλά συνεχής για $x\in[0,1]\setminus A$



Παίρνουμε $x_0\in A$, $x_0\neq 0$, $x_0+\frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n]{} x_0$

$f\left(x_0+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)=1 \xrightarrow[n]{} 1 \neq f(x_0)=0$

Ασυνεχής $\forall x_0\in A$

- $x'\in[0,1]\setminus A$
  $x'\in\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}\right)$ για κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$

$f|_{\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}\right)}(x) = 1$ συνεχής Τοπική Συμπεριφορά

σε κάθε $x'\in\left(\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}\right)$

Άρα η f συνεχής για $x'\in[0,1]\setminus A$

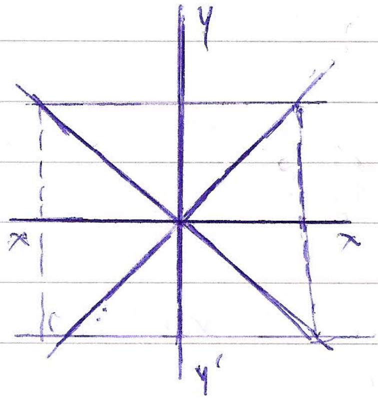
Πόσα σημεία ασυνέχειας έχει αυτή η συνάρτηση;
- Άπειρα, διότι διαφορετικά οι πραγματικοί αριθμοί θα ήταν πεπερασμένοι.

Για μια συνάρτηση με αριθμήσιμο αριθμό σημείων ασυνέχειας υπάρχει το ολοκλήρωμα. Για τις f του παραδείγματος το $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

4) i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $|f(x)| \le |x|$ $x\in\mathbb{R}$. Τότε η f συνεχής στο $x_0=0$

ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=0$ και $g(0)=0$ με $|f(x)| \le |g(x)|$, $x\in\mathbb{R}$

Τότε η f συνεχής στο $x_0=0$



Απόδειξη:

$f(0)=0$ $(0 \le |f(0)| \le 0)$

$\varepsilon>0$ Έστω $\delta=\varepsilon>0$

Τότε αν $|x-0|=|x|<\delta$

$\Rightarrow |f(x)| < \delta = \varepsilon$

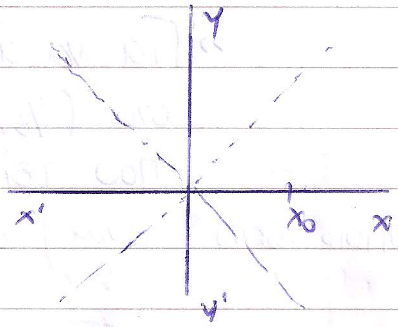
$|f(x)| \le |x|$

(Ώστε να μας δοθεί ο ορισμός της συνέχειας)

Άρα η f συνεχής στο $x_0=0$

ii) Ανάλογα

5)
$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ -x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$



Η f συνεχής στο $x_0=0$

και ασυνεχής $x'\in\mathbb{R}-\{0\}$

$\varepsilon>0$ $\delta=\varepsilon$ και $|x|<\delta$

Τότε $|f(x)-f(0)|=|f(x)|=|x|<\delta=\varepsilon$

Συνεχής στο $x_0=0$

$x_0\neq 0$, $\varepsilon>0$

$\begin{cases} x_0\in\mathbb{Q},\ f(x_0)=x_0.\ \text{Έστω } x_n\notin\mathbb{Q} \text{ με } x_n\to x_0,\ f(x_n)=-x_n\to -x_0 \neq x_0=f(x_0) \\ x_0\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\ f(x_0)=-x_0.\ \text{Έστω } p_n\in\mathbb{Q} \text{ με } p_n\to x_0 \end{cases}$

$\boxed{x_0\neq 0}$

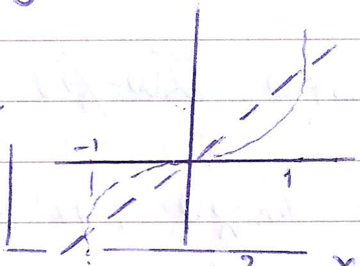
$f(p_n) = p_n \longrightarrow x_0 \neq -x_0 = f(x_0)$ άρα Η f ασυνεχής για $x_0 \neq 0$

<u>Παραλλαγές</u>

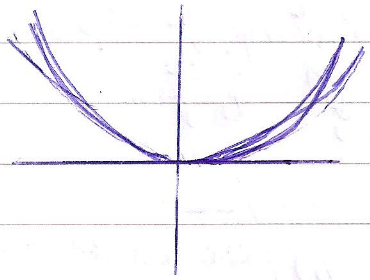
$g(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ -x^2 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$

(>> Άσκηση Γιαννόπουλου. Να την κοιτάξω ???)

$h(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$



Συνεχής $x_0\in\{0,1,-1\}$
Ασυνεχής $x\notin\{0,1,-1\}$



$\Leftarrow f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ x^4, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ Συνεχής εκεί που τέμνονται.

» Να θυμάστε τη $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ ώστε να κατανοήσουμε το ρόλο-χρήση των $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ «

6) $f_0(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0\end{cases}$ $\quad$ (a = σταθερός)

$f_k(x)=\begin{cases} x^k\,\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$

Να δείξετε αν είναι συνεχής ή όχι.

- Για $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x_0\neq 0$, $\frac{1}{x}$ συνεχής στο x_0, $\eta\mu y$ συνεχής $\forall y\in\mathbb{R}$
$x_0\neq 0$: $\eta\mu\frac{1}{x}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών

Για $x_0=0$: $x_n=\frac{1}{2\pi n}\xrightarrow[n]{} 0$, $f(x_n)=\eta\mu(2\pi n)=0\xrightarrow{n} 0$

>> Πρέπει να πάρουμε κι άλλη ακολουθία, μήπως διαφοροποιείται.

$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n]{} 0$, $f(y_n) = ημ(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1 \xrightarrow{n} 1$

Αν η f_0 ήταν συνεχής στο $x_0 = 0$ θα έπρεπε $0 = f(0)$

& $1 = f(0)$

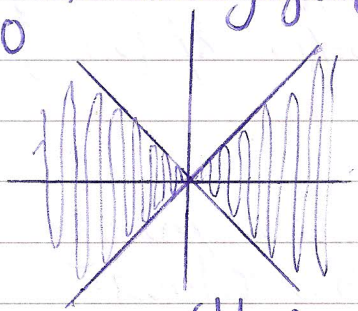
$0 = f(0) = 0 = 1$ Αδύνατο

Άρα, η f ασυνεχής στο μηδέν.)

○ Για την f_k

Με την ίδια λογική για $x_0 \neq 0$. Συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

$x_0 = 0$



Για $x_n \xrightarrow[n]{} 0$, $f_k(x_n) = \underbrace{x_n^k}_{\downarrow n \ 0} \cdot \underbrace{ημ\frac{1}{x_n}}_{φραγμένη} \xrightarrow{n} 0 = f(0)$

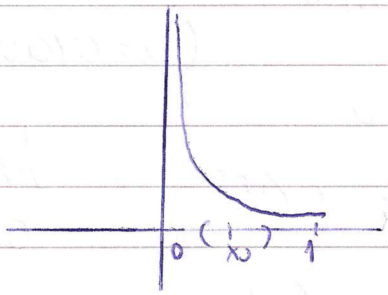
Συνεχής στο $x_0 = 0$

Υπενθύμιση:

(Μηδενική) x (Φραγμένη) = (Μηδενική) / από άσκηση 4(ii)

Άσκηση (Κατανόησης Τοπικού Φράγματος) **

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$



Για $x_0 \in (0,1]$ $\exists$ $M_{x_0} > 0$

$\delta_{x_0} > 0$: αν $|x - x_0| < \delta_{x_0}$

τότε $|f(x)| = f(x) \le M_{x_0}$

(Τοπικά Φραγμένη)

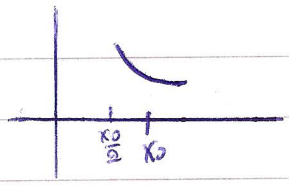
Αλλά δεν υπάρχει $M > 0$: $0 < f(x) \le M$ για $\forall x \in (0,1]$

δηλ. η f δεν είναι άνω φραγμένη, ενώ το διάστημα είναι φραγμένο.

$x_0 \in (0,1]$, δ_{x_0}? M_{x_0}?

ώστε αν $x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ τότε $f(x) \le M_{x_0}$

>> Την ~~αφαιρώ~~ αποδεικνύω τη συνάρτηση



Αν $\delta x_0 = \frac{x_0}{2} > 0$

$M x_0 = \frac{2}{x_0} > 0$

Τότε αν $\frac{x_0}{2} < x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} < \frac{2}{x_0} = M x_0$ άρα η συνάρτηση είναι τοπικά φραγμένη // σε κάθε $x_0 \in (0,1]$.

Έστω $\exists M > 0$, $0 < \frac{1}{x} \leq M$ $\forall x \in (0,1]$

$x_n = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{x_n} = n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$ Άτοπο από Αρχιμήδεια Ιδιότητα

» $(0,1]$ φραγμένο ενώ $f((0,1])$ δεν είναι φραγμένο //