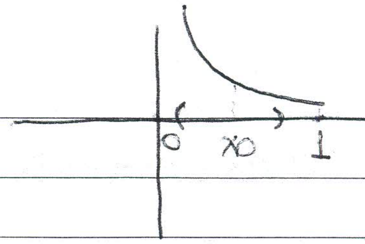
Άσκηση SOS

$f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1]$



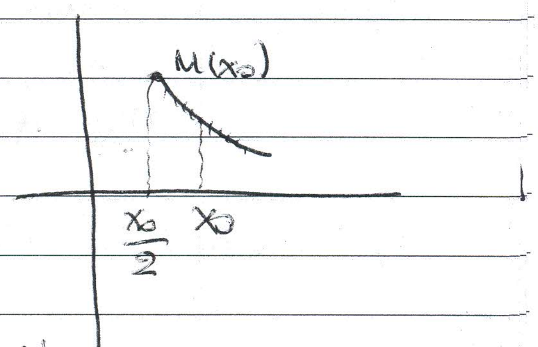
Η f είναι συνεχής.

Για $x_0\in(0,1]$ ∃ $M_{x_0}, \delta_{x_0}>0$:
αν $|x-x_0|<\delta_{x_0}$ τότε $|f(x)|=f(x)\le M_{x_0}$ (Είναι δλδ τοπικά φραγμ.)
αλλά δεν υπάρχει $M>0$: $0<f(x)\le M$ $\forall x\in(0,1]$
Η f δλδ δεν είναι άνω φραγμένη.
Δηλ. ενώ το διάστημα είναι φραγμένο, και $\forall x\in(0,1]$ είναι τοπικά φραγμένη, όμως συνολικά η f δεν είναι (άνω) φραγμένη.

$x_0\in(0,1]$, δ_{x_0}, M_{x_0} ώστε αν $x\in(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0})$ τότε $f(x)\le M(x_0)$.

Για $\delta_{x_0}=\frac{x_0}{2}>0$, $M_{x_0}=\frac{2}{x_0}>0$

Έχω $\frac{x_0}{2}<x \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}<\frac{2}{x_0}=M_{x_0}$.



Έστω ότι $\exists M>0: 0<\frac{1}{x}\le M \ \forall x\in(0,1]$
Τότε αν $x_n=\frac{1}{n}$ θα έπρεπε $\frac{1}{x_n}=n\le M$, $n\in\mathbb{N}$

~~Άτοπο~~ από αρχιμήδεια ιδιότητα

ΜΑΘΗΜΑ 28 (10/12/12)

Τα **ΔΥΟ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ** των συνεχών συναρτήσεων (Απ. Λογ. Ι) και τα πορίσματα αυτών (Θ. Μεγ-Ελ. τιμής, Θ. Ενδ. τιμής, Θ. Αντιστρόφου)

Θ1 Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Τότε $f([\alpha,\beta])$ είναι φρ. $\subseteq\mathbb{R}$

Θ2 Έστω $f: I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I (=διάστημα) και ∃ $\alpha,\beta\in I$ τ.ω. $f(\alpha)<0<f(\beta)$. Τότε ∃ $\xi\in I$ τ.ω. $f(\xi)=0$ (Θ. Bolzano)

Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες του συνόλου $[\alpha,\beta]$, $\alpha\le\beta$

i) Το $[\alpha,\beta]$ είναι $\boxed{\text{φραγμένο}}$ σύνολο

Άλλα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$: (α,β), $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, $[0,1)\cup(1,2]$, $[0,1]\cup[2,3]$, $\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cap[0,1]$

όχι φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$:
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[\alpha,+\infty)$, $(\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,\beta]$, $\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$.

ii) Θεωρώ $K\subseteq\mathbb{R}$, $K\neq\emptyset$, K $\boxed{\text{κλειστό}}$ σύνολο $\Longleftrightarrow$ αν $x_n\in K$, με $\lim x_n=\alpha\in\mathbb{R}$ τότε $\alpha\in K$

Πχ $A=\left\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}$, $[\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\beta]$, $\mathbb{N}$,

$[\alpha,\beta]$, $[0,1]\cup[2,3]$.

όχι κλειστά - μη κενά: πχ - (α,β), $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

iii) $A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{R}$, $A=$ συνεκτικό σύνολο/διάστημα $\Leftrightarrow$ αν $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ τότε καθε $y\in\mathbb{R}$ με $x_1<y<x_2$ ανήκει στο A. πχ $\mathbb{R}$, $[0,+\infty)$, $(\alpha,+\infty)$, (α,β), $[\alpha,\beta]$
(δηλ. όχι οι ενώσεις).

όχι συνεκτικά: $\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $[0,1]\cup[2,3]$

Σημείωση: Το $[\alpha,\beta]$ είναι το μοναδικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που είναι κλειστό, φραγμένο και διάστημα. Δεν υπάρχει άλλο.

Παρατήρηση:

Για το $\boxed{Θ1}$: Για την απόδειξη του Θ1 χρειαζόμαστε τα εξής i) Πιι

ii) τοπικό φράγμα της f.

Εάν η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε $x_0 \in A$ τότε $\exists\, \delta_{x_0} > 0$, $M_{x_0} \in \mathbb{R}$: αν $x \in [x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0}] \cap A$ τότε $|f(x)| \le M_{x_0}$.

$\Rightarrow \exists\, \delta'_{x_0} > 0$, $M_{x_0} \in \mathbb{R}^+$: αν $x \in [x_0-\delta'_{x_0}, x_0+\delta'_{x_0}] \cap A \Rightarrow |f(x)| \le M_{x_0}$.

Θα γίνει και 2η απόδειξη με τη χρήση του Θεωρήματος Bolzano-Werestrass (ενότητα, Αν. Λογ. ΙΙ).

Θεώρημα Bolzano - W.

Έστω $(a_n)_n$ του $\mathbb{R}$, φραγμένη. Τότε $\exists$ υπακολουθία $(a_{k_n})_n$ συγκλίνουσα.

⊛ υπακολουθία: $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε $k_n \geq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 1 (Απόδειξη):

Έστω $f: \underset{\text{κλειστό + φρ. υποσ.}}{[\alpha,\beta]} \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε το $f([\alpha,\beta]) \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο υποσ. Δηλαδή $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$: $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$.
Η f είναι άνω και κάτω φραγμένη συνάρτηση.

Απόδ: Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$, $(\alpha < \beta)$.

α' Τρόπος (3 ισχυρισμοί)

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{ x \in [a,b] : f|_{[a,x]}$ είναι άνω φρ $\}$

δηλ $f(y) \le M_x$, $y \in [a,x]$ (για κάποιο $M_x \in \mathbb{R}$)

•) $A \neq \emptyset$, ($a \in A$, $f(a) \le f(x)$)
•) $A \subseteq [a,b]$, b = άνω φρ. του A

$\overset{\text{Πλ}}{\Rightarrow} \exists\, s = \sup A \in [a,b]$,

Ισχυρισμός 1: $s > a$

Απόδειξη: Η f συνεχής στο $a \Rightarrow \exists\, \delta_a > 0$ τ.ω. $a + \delta_a < b$ και $f|_{[a, a+\delta_a]}$ άνω φραγμένη. $\Rightarrow a + \delta_a \in A \Rightarrow s = \sup A \geq a + \delta_a > a$

Ισχυρισμός 2: $s = b$

Απόδειξη: Έστω ότι $(a <)\, s < b$

Η f είναι συνεχής στο $s \in (a,b)$ τότε $\exists\, \delta_s > 0 : a < s - \delta_s < s + \delta_s < b$ και $f|_{[s-\delta_s, s+\delta_s]}$ ... $s - \delta_s < s = \sup A \Rightarrow \exists\, x_1 \in A : s - \delta_s < x_1 \le s$

$x_1 \in A : \Rightarrow f|_{[a, x_1]}$ άνω φρ.

Έχουμε όμως ότι $f|_{[s-\delta_s, s+\delta_s]}$ άνω φρ

Άρα $\Rightarrow$ η f άνω φρ στο $[a, x_1] \cup [s-\delta_s, s+\delta_s] = [a, s+\delta_s]$

Άρα $s + \delta_s \in A$ Άτοπο γιατί $s = \sup A$ και $s + \delta_s > s$

Άρα $s = b$

Ισχυρισμός 3: $s = b \in A$ ($\sup A = \max A$)

Απόδειξη: Η f είναι συνεχής στο $b \Rightarrow \exists\, \delta_b > 0 : b - \delta_b > a$ και $f|_{[b-\delta_b, b]}$ άνω φρ. $b - \delta_b < b = s = \sup A \Rightarrow$
$\exists\, x_2 \in A : b - \delta_b < x_2 \le b$

Τότε $f|_{[a, x_2]}$ άνω φρ
$f|_{[b-\delta_b, b]}$ άνω φρ
$\Rightarrow f$ άνω φρ στο $[a,b]$

B' τρόπος (από Άσκ II) Bol.-Wer

Έστω ότι η $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και όχι άνω φραγμ.
Θεωρώ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, x_n \in [a,b] : f(x_n) > n$ (*)
Η $(x_n)_n$ είναι φραγμένη ακολουθία $\overset{WB}{\Rightarrow} \exists\, x_{k_n} \to x_0 \in \mathbb{R}$.
$a \le x_{k_n} \le b \Rightarrow a \le x_0 \le b$.
f συνεχής στο $x_0 \in [a,b] \overset{AM}{\Rightarrow} f(x_{k_n})_n \to f(x_0)$
Επειδή η $(f(x_{k_n}))_n$ είναι συγκλίνουσα, είναι φραγμένη $\Rightarrow$
$\exists\, M \in \mathbb{R} : f(x_{k_n}) \le M, n \in \mathbb{N}$
$n \le k_n \underset{(*)}{\le} f(x_{k_n}) \le M, n \in \mathbb{N}$ / Άτοπο από αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$.

Άρα η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$

Σημ: Για το κάτω φρ. της f θεωρούμε την $-f:[a,b] \to \mathbb{R}$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Θ. ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f συνεχής, τότε $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$:
$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)\ \forall x \in [a,b]$

Δηλ: Το $\sup f([a,b])$ είναι $\max f([a,b])$
και το $\inf f([a,b])$ είναι $\min f([a,b])$

Απόδειξη: (α' τρόπος)
Από το Θ.1 το σύνολο $f([a,b])$ είναι άνω φραγμένο.
Άρα $\exists\, s_0 = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Έστω $s_0 \notin f([a,b])$
Τότε $s_0 - f(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$

Θεωρούμε την $g(x) = \dfrac{1}{s_0 - f(x)} > 0$, $x \in [a,b]$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$.
Άρα $\exists\, M > 0 : 0 < g(x) = \dfrac{1}{s_0 - f(x)} \le M$ (από Θ.1), $x \in [a,b]$

~~Άρα~~ ~~..~~ Τότε το $s_0 - \frac{1}{M}$ $(< s_0)$ είναι άνω φρ. της f.
Άτοπο γιατί s_0 = ελ. άνω φράγμα της $f([a,b])$

(λόγω της σημείωσης λείπει η σελ. 149 = ΚΕΝΗ)

Μαθημα 29 (12/12/2012)

Θεώρημα 2 $\boxed{\text{Λήμμα Bolzano}}$ $**$

$f: I \to \mathbb{R}$ συνεχης, $I =$ διάστημα

Έστω οτι υπάρχουν $\alpha, \beta \in I$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$

Τότε υπάρχει $\xi \in I$ (ανάμεσα στα α,β) ώστε $f(\xi)=0$

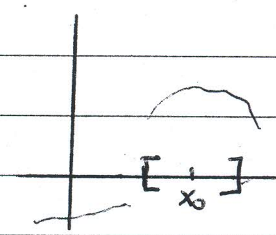
Χρησιμοποιούμε τα εξης:

Πιμ (άμεσα (α' τροπος) ή έμμεσα (γ' τροπος))

$f: A \to \mathbb{R}$ συν. στο $x_0 \in A$ με $f(x_0)>0$ τοτε $\exists \delta_{x_0}>0$:

αν $x \in A \cap [x_0-\delta, x_0+\delta]$ τοτε $f(x)>0$

Τοπικη συμπεριφορα



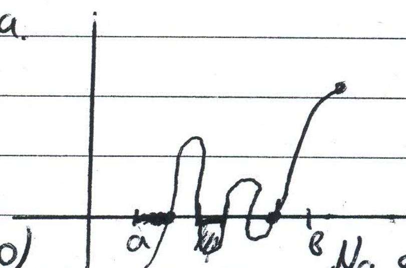
Αρχη Μεταφοράς και: αν $y_n > 0$ $n \in \mathbb{N}$, $\lim y_n = y_0 \Rightarrow y_0 \geq 0$

Αποδειξη: Υποθετουμε οτι $\alpha<\beta$ και $f(\alpha)<0<f(\beta)$

Θα αποδείξουμε οτι $\exists\ \xi \in (\alpha,\beta)$ $f(\xi)=0$

Α' τροπος Ίδιος τρόπος με τοπικο φράγμα.

$$A = \{x \in [\alpha,\beta] : f|_{[\alpha,x]} < 0\}$$



πως εντοπίζετο το ξ? Να είναι το sup ενός συνόλου ώστε Πιμ να ∃

• $A \neq \emptyset$ γτ $\alpha \in A$, $f|_{[\alpha,\alpha]} = \{\alpha\} < 0$ $(f(\alpha)<0)$

• $A \subseteq [\alpha,\beta]$ $A =$ ανω φραγμένο ($\beta =$ άνω φράγμα)

$A \neq \emptyset$, $A =$ ανω φρ $\xRightarrow{\text{Πιμ}} \exists\ \xi = \sup A \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \xi \leq \beta$, $\xi \in I =$ διαστ.

αλλιως θα χαμε το sup

Ισχ. 1 $\xi > \alpha$

H f συνεχής στο $x_0 = \alpha$ με $f(x_0)<0 \Rightarrow \exists \delta_\alpha > 0$: $f|_{[\alpha,\alpha+\delta_\alpha]} < 0$

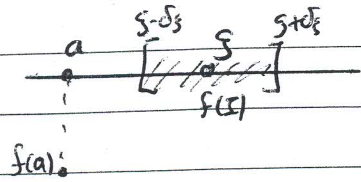
$\underline{\alpha+\delta_\alpha < \beta}$ ∃ αλλιως το μικραινε περισσοτερο

Αρα $\alpha+\delta_\alpha \in A \Rightarrow \alpha < \alpha+\delta_\alpha \leq \xi = \sup A$

$\Rightarrow \xi > \alpha$

Ισχυρισμός 2 $f(\xi)\geq 0$

Έστω ότι δεν ισχύει ότι $f(\xi)\geq 0$. Τότε $f(\xi)<0$



$f(\xi)<0,\ f(\beta)>0 \Rightarrow \xi<\beta$

Τότε και από Ισχ. 1 $\xi\in(a,\beta)$. Η f συνεχής στο ξ. Με $f(\xi)<0 \Rightarrow \exists\, \delta_\xi>0$ $[\xi-\delta_\xi, \xi+\delta_\xi]\subseteq(a$

με $f|_{[\xi-\delta_\xi,\ \xi+\delta_\xi]}<0$

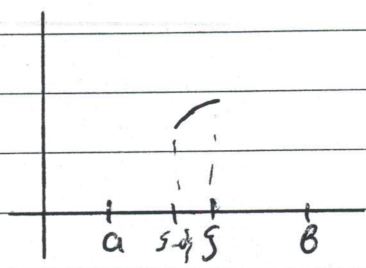
Το $\xi-\delta_\xi<\xi=\sup A \Rightarrow \exists\, x_1\in A : \xi-\delta_\xi<x_1$

$\Rightarrow f|_{[a,x_1]}<0$ Επίσης $f|_{[\xi-\delta_\xi,\ \xi+\delta_\xi]}<0$

Άρα $f|_{[a,\ \xi+\delta_\xi]}<0 \Rightarrow \xi+\delta_\xi\in A$ Άτοπο διότι ξ είναι άνω φράγμα του A

Άρα $f(\xi)\geq 0$

Ισχυρισμός 3 $f(\xi)=0$ $(a<\xi\leq\beta)$



Έστω ότι $f(\xi)>0 \Rightarrow \exists\, \delta'_\xi>0 : a<\xi-\delta'_\xi$

$f|_{[\xi-\delta'_\xi,\ \xi]}>0$

$\exists\, x_2\in A : a-\delta'_\xi<x_2\leq\xi \Rightarrow f(x_2)<0$ / Άτοπο

$x_2\in[a-\delta'_\xi, \xi] \overset{*}{\Longrightarrow} f(x_2)>0$

Απόδειξη ίδια με το τοπικό φράγμα.

β' τρόπος

$B=\{x\in[a,\beta] : f(x)<0\}$

$a\in B$ $f(a)<0$ / $\overset{\Pi.\mathrm{I}.}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \xi=\sup B\in[a,\beta]$

$B\subseteq[a,\beta]$

$\xi=\sup B \Rightarrow \exists\, a_n\in B :$

$a_n\to\xi \overset{AM}{\Longrightarrow} f(a_n)\to f(\xi)$ $\Big\}\Rightarrow f(\xi)\leq 0$

$a_n\in B \to f(a_n)<0$

$f(\xi)\le 0$, $\xi<b$ (διότι $f(b)>0$)

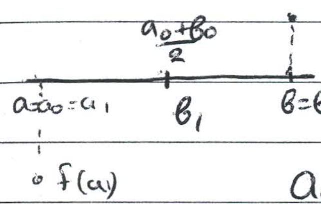
$\xi_n = \xi + \frac{b-\xi}{n} \in [\xi, b] \subseteq I$ Άρα είναι μεγαλύτερη του φράγματος
$\xi_n > \xi = \sup B \Rightarrow \xi_n \notin B \Rightarrow f(\xi_n)\ge 0$

Άρα $\xi_n \to \xi \xRightarrow{AM} \left.\begin{array}{l} f(\xi_n)\to f(\xi) \\ f(\xi_n)\ge 0 \end{array}\right\} f(\xi)\ge 0$.

Τελικά $f(\xi)=0$

γ' τρόπος (Μέθοδος της Διχοτόμησης / Αλγόριθμος στην Αριθμητική Ανάλυση)

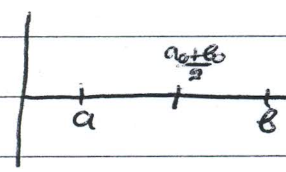
$a_0=a$, $b_0=b$, $a_0<b_0$, $b_0-a_0=b-a$



$\frac{a_0+b_0}{2}\in(a_0,b_0)$
- $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)=0$, $\xi=\frac{a_0+b_0}{2}$, $f(\xi)=0$
- $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)>0$, $a_1=a_0$, $b_1=\frac{a_0+b_0}{2}$
- *

$a_0\le a_1<b_1\le b_0$, $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$, $f(a_1)<0<f(b_1)$

* $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)<0$ $a_1=\frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1=b_0$
$a_0\le a_1<b_1\le b_0$



$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$, $f(a_1)<0<f(b_1)$

Συνεχίζουμε Έστω $n\in\mathbb{N}$: $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\ne 0$
$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$, $f(a_n)<0<f(b_n)$

Τότε αν $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$
Θα πάρουμε $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ $f(a_{n+1})<0<f(b_{n+1})$
$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$, $a_0\le a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le\dots\le b_0$

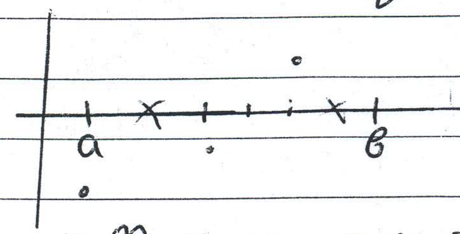
Αν $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=b_n$

Θα ισχύουν τα ίδια

» Αν ένα μηδέν έχατε ξεφεύγει αν είναι θετικό παίρνατε άλλο διάστημα

$(a_n)_n \uparrow$ άνω φραγμένη $\Rightarrow a_n \xrightarrow{n} \xi \in [a,b]$

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n} 0$



$\Rightarrow b_n \xrightarrow{n} \xi$

$\left.\begin{array}{l} a_n \to \xi,\ f(a_n)<0 \xRightarrow{AM} f(\xi)\le 0 \\ b_n \to \xi,\ f(b_n)>0 \xRightarrow{AM} f(\xi)\ge 0 \end{array}\right\} f(\xi)=0$

» Όλα τα άκρα το ένα θετικό το άλλο αρνητικό, τα "στριμώχνατε" ξ βρίσκατε ρίζες

(Πόρισμα του Θ. Bolzano)

Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής

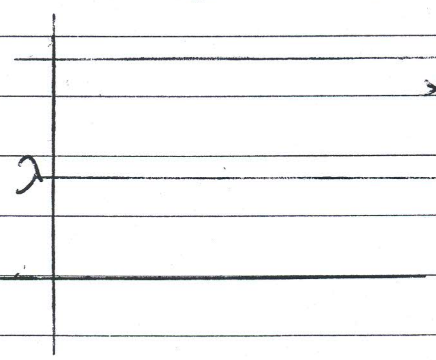
$f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής, I = διάστημα. Τότε

i) Εάν $x_1, x_2 \in I$ με $f(x_1)<f(x_2)$

Τότε για $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(x_1)<\lambda<f(x_2)$ υπάρχει $\xi_\lambda \in I$: $f(\xi_\lambda)=\lambda$

ii) $f(I)$ είναι διάστημα Θ.Ε.Τ.

Απόδειξη



$g(x)=f(x)-\lambda \quad x\in I$ συνεχής

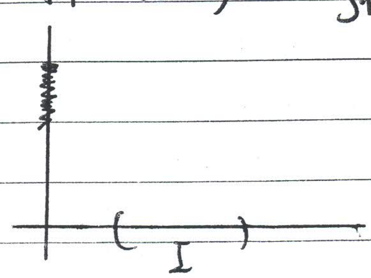
$g(x_1)<0<g(x_2) \xRightarrow{Θ.Bol} \exists\, \xi_\lambda \in I: g(\xi_\lambda)=0$

δηλ. $\exists\, \xi_\lambda \in I \quad f(\xi_\lambda)=\lambda$

» Κατεβάζω τη συνάρτηση προς άξονα

ii) $f(I)$ διάστημα $\Leftrightarrow f(x_1), f(x_2) \in I$ και $y \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)<y<f(x_2)$ τότε $y \in f(I)$

Από το i) $\exists\, \xi_y \in I: f(\xi_y)=y \Rightarrow y \in f(I)$ Ταυτολογία στην ουσία



» Τότε η εικόνα του είναι ένα διάστημα (δε γνωρίζατε είδος α κλειστό διάστημα → τυχαίο διασ.

Πόρισμα (Συνδυασμός του Θ.ΜΕΤ + ΘΕΤ)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $f([a,b])=[\min f([a,b]), \max f([a,b])]$

Απόδειξη: $\exists\ x_1,x_2\in[a,b] : f(x_1)=\min\{f(x): x\in[a,b]\}$

$f(x_2)=\max\{f(x): x\in[a,b]\}$

Άρα $x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\in[f(x_1),f(x_2)]$

$f([a,b])\subseteq[f(x_1),f(x_2)]$

Έστω $y\in(f(x_1),f(x_2))$, $f(x_1)<y<f(x_2)$

$\overset{ΘΕΤ}{\Rightarrow} \exists\ x_0\in[a,b],\ f(x_0)=y$

$\Rightarrow y\in f([a,b])$. Τελικά $[f(x_1),f(x_2)]\subseteq f([a,b])$

Ασκήσεις Σ/Λ

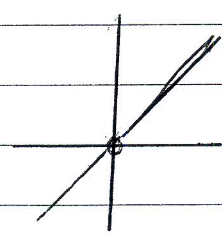
1) $f: I\to\mathbb{R}$ συνεχής, I = φραγμ. διάστημα. Τότε το $f(I)$ είναι φραγμένο

Λάθος ?? πχ $I=(0,1]$ $f(x)=\frac{1}{x}$, $f((0,1])=[1,+\infty)$

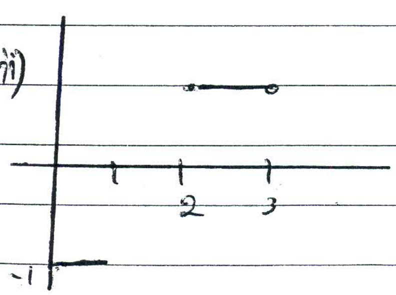
2) $f: A\to\mathbb{R}$ συνεχής στο A με $a,b\in A$ για $f(a)<0<f(b)$

Τότε $\exists\ \xi\in A : f(\xi)=0$

Λάθος i) $f(x)=x\in[-1,0)\cup(0,1]$



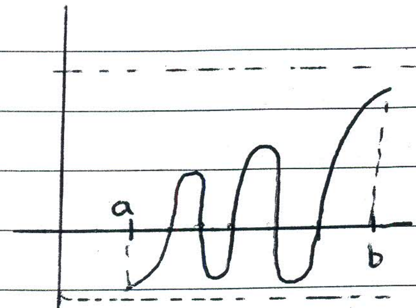
ii)



$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in[2,3]\end{cases}$$

Μαθημα 30   2012/12/14

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$



Φραγμένη: ανάμεσα σε δύο γραμμές
Sup: μιλάμε για υποσύνολο του $\mathbb{R}$

Trick: ερχεσαι απο το $+\infty$ μόλις χτυπήσεις το σύνολο είναι το sup

Ασκηση 1
$f: [a,b] \to [a,b]$ συνεχής
Νδο $\exists\, x \in [a,b]$ ώστε $f(x) = x$

>> Όταν λέμε ισχύει αυτό ή αυτό η αρνηση είναι δεν ισχύει ούτε το ένα ούτε το άλλο
Η άρνηση του ή είναι το και

Θεωρούμε $g(x) = f(x) - x$
$g: [a,b] \to \mathbb{R}$

• Αν $f(a) = a$ ή $f(b) = b$ ισχύει

• $f(a) > a$ και $f(b) < b$
$g(a) = f(a) - a > 0$
$g(b) = f(b) - b < 0$

Άρα απο Θ.Ε.Τ. $\exists\, x \in [a,b]$ γνησίως ξ απο τα δύο πέρατα ώστε $g(x) = 0 \iff f(x) = x$

Ασκηση 2
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ τετοιο ώστε $\forall x \in [a,b]$
$|f(x)| = 1$. Νδο η f σταθερή (f συνεχής), $f(x) = 1$, $x \in [\alpha, \beta]$

Εστω f όχι σταθερή. Εστω $x_1, x_2 \in [a,b]$:
$f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$ Απο Θ.Ε.Τ $\exists\, x \in (x_1, x_2) \subseteq [a,b]$
με $f(x) = 0$. Ατοπο αφού $|f| = 1$

Άσκηση 3

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ τ.ω $f^2(x) = g^2(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Έστω επίσης ότι $f(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ >> Γενικά όπου $f(x) \neq 0$ έχει νόημα αν θα μπει παρονομαστής <<

Ν.δ.ο $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Θεωρούμε την $\frac{g^2(x)}{f^2(x)}$. Τότε $\frac{g^2(x)}{f^2(x)} = 1 \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = 1$

Από προηγούμενη άσκηση είτε

$\frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x)$ είτε $\frac{g(x)}{f(x)} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -f(x)$

Περιπτώσεις: Έστω $f(a) > 0$ τότε $f(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$

▷ Έστω $g(a) > 0$ Από ΘΕΤ πάλι $g(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$

Επειδή $f^2(x) = g^2(x)$ έπεται $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

▷ Αν $g(a) < 0$ τότε από Θ.Ε.Τ. $g(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$

Άρα (επειδή $f^2(x) = g^2(x)$) $f(x) = -g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Έστω $f(a) < 0$ τότε $f(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$ (δηλ. η f όλη αρνητική ξανά)

Άσκηση 4

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) \in \mathbb{Q}$ $\forall x \in [a,b]$

Ν.δ.ο f σταθερή

Γενικά τρόποι απόδειξης:
- Ευθεία $A \to B$
- Άτοπο. Έστω ότι ισχύει το A και δεν ισχύει το B
- Υποθέτω ότι δεν ισχύει το B και δείχνω ότι δεν ισχύει και το A

Έστω ότι η f μη σταθερή. Τότε $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ τ.ω $f(x_1) \neq f(x_2)$. Δίχως βλάβη της γενικότητας έστω $f(x_1) < f(x_2)$
Τότε $\exists\ y_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τ.ω. $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$

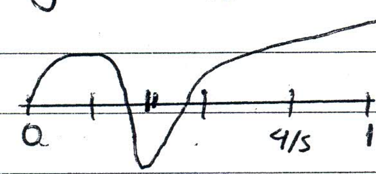
Από το Θ.Ε.Τ. $\exists\ x_0 \in [a,b]$ τ.ω $f(x_0) = y_0 \notin \mathbb{Q}$.
Άτοπο από την υπόθεση

Άσκηση 5
$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(1)$
Ν.δ.ο $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ τ.ω $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$

Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ >> Αμέσως αφού θεωρήσω συνάρτηση βρίσκουμε που ορίζεται <<
$g: [0, 1 - \frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$

$g(0) + g(\frac{1}{n}) + g(\frac{2}{n}) + \dots + g(\frac{n-1}{n}) =$

$f(0) - f(\frac{1}{n}) + f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n}) + f(\frac{2}{n}) - f(\frac{3}{n}) + \quad +$
$f(\frac{n-1}{n}) - f(1) = f(0) - f(1) = 0$



Άρα $\exists\ k, \lambda \in \{0, 1, 2 \dots n-1\}$ ώστε $g(\frac{k}{n}) \geq 0$ και $g(\frac{\lambda}{n}) \leq 0$ ⊛

Αν $g(\frac{k}{n}) = 0$ ή $g(\frac{\lambda}{n}) = 0$ τότε ισχύει
$\frac{0}{n} \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

Εάν όχι από την ⊛ θα ισχύει $g(\frac{k}{n}) > 0$ και $g(\frac{\lambda}{n}) < 0$
Από Θεώρημα Ενδ. Τιμής $\exists\ \frac{k}{n} < x < \frac{\lambda}{n}$ τ.ω $g(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ $\left(\frac{k}{n} < x < \frac{\lambda}{n} \Rightarrow 0 < x < 1 - \frac{1}{k} \right.$
αφού $\left. k, \lambda \in \{0, \dots n-1\} \right)$

Άσκηση 6

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in [a,b]$ Νδο $\forall t \in [0,1]$ $\exists$ $y_t \in [a,b]$
τ.ω. $f(y_t) = t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$

$a, b \in \mathbb{R}$ $t \in [0,1]$
$\{ x : x = ta + (1-t)b,\ t \in [0,1] \} = [a,b]$

Αφού η f συνεχής έπεται ότι η f πιάνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της, έστω m και M αντίστοιχα.

$m = tm + (1-t)m \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \leq tM + (1-t)M = M$
Από Θ.Ε.Τ $\exists$ $y_t \in [a,b]$ $f(y_t) = t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$

Άσκηση 7

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή και έστω $x_1, x_2 \dots x_n \in [a,b]$
Νδο $\exists$ $y \in [a,b]$ $f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$

$m = \frac{\overbrace{m + m + \dots + m}^{n \text{ φορές}}}{n}$ Παρόμοια με την Άσκηση 6

Τρίτη-Πέμπτη Αναγνωστήριο από Μεταπτυχιακούς για απορίες Απειροστικού Ι 12:30 - 14:30

Μάθημα 31 (17/12/2022)

Ασκήσεις (συνέχεια...)

Άσκηση 8

i) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$

Τότε $\exists\, p>0 : f(x) \geq p > 0 \quad x\in[a,b]$

ii) $h, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $h(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$

Τότε $\exists\, \sigma>0 : h(x) > g(x)+\sigma$ για κάθε $x\in[a,b]$

iii) Ισχύει το i) για $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)>0 \ \forall x\in(a,b]$;

Επειδή $[a,b]$ γι' αυτό μόνο φαγαρείο Μ.Ε.Τ.

Συνεχής σημαίνει ότι υπάρχει σημείο όπου η f παίρνει ελάχιστη-μέγιστη τιμή και επειδή $p \leq f(x)$ θα χρησιμοποιήσουμε την ελάχιστη τιμή

Λύση:

i) Θ.Μ.ΕΤ υπάρχει $x_1\in[a,b]$:

$f(x) \geq f(x_1) \quad x\in[a,b]$

Χρησιμοποιούμε $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x_1\in[a,b] \Rightarrow f(x_1)>0$

Άρα $f(x) \geq p = f(x_1)$

Με $f(x)>0 \ \forall x\in[a,b]$

ii) $f = h-g$ συνεχής ως διαφορά συνεχών

Άρα $\exists\, \sigma'>0 : h(x)-g(x) \geq \sigma' > 0 \ \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow$ για $\sigma = \frac{\sigma'}{2}$: $h(x)-g(x) > \sigma \quad \forall x\in[a,b]$

Ως θέλω έχει θέσει αυθαίρετες φορές ??? (από i))

Δεν $\exists$ ελάχιστος πραγματικός αριθμός

iii) Δεν ισχύει το Θ.ΕΤ στο $(a,b]$

Στην απόδειξη αρκεί να βρούμε το σημείο που παίρνει το ελάχιστο να είναι το αριστερό άκρο

$f(x) = x > 0 \quad x\in(0,1]$ (ή $f(x) = x^5, x^2 \ldots$)

Αλλά δεν $\nexists\, p>0 : x>p>0 \quad \forall x\in(0,1]$

Δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός στο $(0,1]$

» Θα μπορούσε οπωσδήποτε ελάχιστο στο αριστερό άκρο.
Διότι το ελάχιστο ή το μέγιστο μπορεί να βρίσκεται στα άκρα.

Άσκηση 9

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Έστω ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $y_x \in [a,b]$: $|f(y_x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $\exists\, x_0 \in [a,b]: f(x_0) = 0$

Λύση: Θ.Μ-ΕΤ $\exists\, x_1 \in [a,b]$:
$|f(x_1)| \leq |f(x)|$, $x \in [a,b]$

» Η f συνεχής $\Longrightarrow$ $|f|$ συνεχής
(το αντίστροφο δεν ισχύει $f(x) = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$
$|f|$ συνεχής, f ασυνεχής «)

» Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισοτική σχέση κατευθείαν θα εφαρμόσουμε ΘΜΕΤ στην απόλυτη τιμή «

Για το $x_1 \in [a,b]$ από την υπόθεση
$\exists\, y_{x_1} \in [a,b]: |f(y_{x_1})| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)|$
Όμως $|f(x_1)| \leq |f(y_x)|$

$|f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)|$
Άρα $|f(x_1)| = 0 \Rightarrow f(x_1) = 0$

Άσκηση 10

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής
i) Εάν η f είναι αύξουσα τότε $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$
ii) Εάν η f γνήσια αύξουσα τότε $f((a,b)) = (f(a), f(b))$ (Έγινε σωστά στο φρ. 9/1/2013)

i) Εφόσον η f συνεχής στο $[a,b]$ η εικόνα της είναι διάστημα
δηλ. $f([a,b]) = [f(x_1), f(x_2)]$ όπου $f(x_1) \leq f(x)$ $x \in [a,b]$
$f(x_2) \geq f(x)$ $x \in [a,b]$

Επειδή $f \uparrow$ $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

Έχει ιδιότητα Ελαχίστου | Έχει ιδιότητα Μεγίστου

Παρατηρήσεις σχετικά με το Θ.Ε.Τ

μπορεί ξ όλο

Έστω σα $I \to \mathbb{R}$ συνεχή (όχι σταθερή). I = διάστημα (τυχαίο)
Δεν έχουμε (γενικά) πληροφορίες για το είδος του διαστήματος $f(I)$ εκτός αν $I=[\alpha,\beta]$

πχ. $f(x)=\frac{1}{x}$ $x\in(0,1]$ (δεν είναι κλειστό φραγμένο)

$f((0,1])=[1,+\infty)$ (είναι κλειστό σύνολο, όχι φραγμένο)

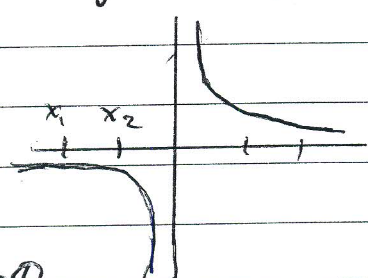
$g(x)=x^2$, $x\in(-1,+1]$ (δεν είναι κλειστό σύνολο, φραγμένο)
$g((-1,+1])=[0,1]$ (κλειστό + φραγμένο)

$h(x)=\eta\mu x$ $x\in[0,+\infty)$ (κλειστό, όχι φραγμένο)
$h([0,+\infty))=[-1,+1]$ (κλειστό, φραγμένο)

Σχέση Γν. Μονότονης Συνάρτησης με "1-1" Συνάρτηση

- $f: A\to\mathbb{R}$ Γν. Μονότονη $\Rightarrow$ Προφανώς f 1-1
- $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 1-1 $\not\Rightarrow$ f γνησίως μονότονη

πχ.
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$



Πρόβλημα:
Το $\mathbb{R}$ = διάστημα
η f όχι συνεχής στο x_0

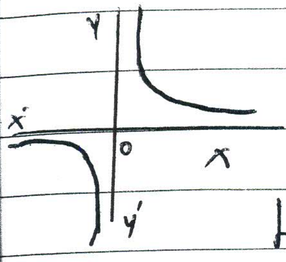
Άλλη
$$g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ -x, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$$

Ασυνεχής $\forall x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$ (αποδείχθηκε)
ξ $\nexists (\alpha,\beta)$: $g|_{(\alpha,\beta)}$ να είναι Γν. Μο
Η g είναι "1-1"

> Άρα για να βρούμε σχέση "1-1" με το Γνήσ. Μονότονη πρέπει να την αναζητάμε στις συνεχείς συναρτήσεις

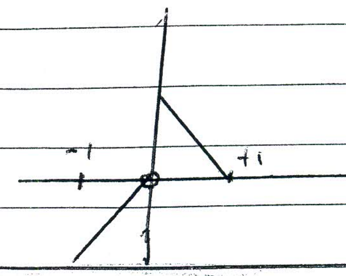
Ερώτημα

Εάν $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής και "1-1" $\underset{;;}{\Rightarrow}$ f. Γνησίως Μονότονη;;



Η $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ → Δεν είναι διάστημα

$$H\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0) \\ 1-x, & x \in (0,1] \end{cases}$$



$x \in [-1,0) \cup (0,1]$

> Άρα για να βρούμε σχέση "1-1" με Γν. Μονοτονία αρκεί να την αναζητούμε σε συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα

Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης (Πόρισμα Θ.Ε.Τ)

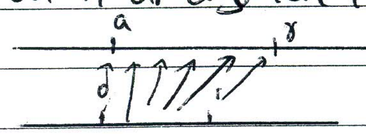
Χρειαζόμαστε Βοηθητική Άσκηση (για τον β' τρόπο απόδειξης)

$a, \gamma \in \mathbb{R}$ $\quad A = \{x \in \mathbb{R} : x = (1-t)a + t\gamma$ με $t \in [0,1]\}$

$\qquad\qquad (a + t(\gamma - a))$

$$= \begin{cases} [a,\gamma], & a \le \gamma \\ [\gamma, a], & \gamma \le a \end{cases}$$

Ας αποδείξουμε ότι η απεικόνιση του $[0,1]$ στο $[a,\gamma]$ είναι



Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και "1-1". Τότε

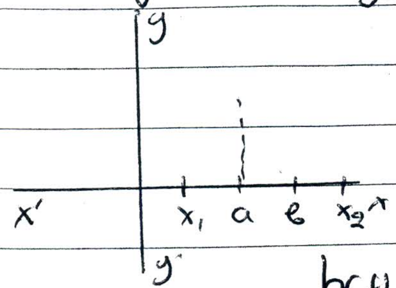
i) Η f είναι γν. Μονότονη

ii) $f^{-1}: f(I) \to I$ είναι συνεχής

Απόδειξη: i) Έστω $a < \beta$, f "1-1" $\longrightarrow f(a) < f(\beta)$

$\searrow f(a) > f(\beta)$

Έστω επίσης ότι $f(a) < f(b)$
(Β' τρόπος απόδειξης) Θα αποδείξουμε ότι η f είναι Γν. Αύξουσα
Αποστόλης Γιαννούδακης



Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι: αν $x_1, x_2 \in I$
με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$
$g(t) = (1-t)a + t x_1,\ t \in [0,1]$ $g(t) \in I =$ διάστημα
$h(t) = x = (1-t)b + t x_2,\ t \in [0,1],\ h(t) \in I =$ διάστημα

Θεωρούμε $H(t) = f(g(t)) - f(h(t)),\ t \in [0,1]$
Καλά ορισμένη & συνεχής !!!

Έστω $t' \in [0,1]:\ H(t') = 0$
Τότε $f(g(t')) = f(h(t')) \overset{f}{\underset{1-1}{\Longrightarrow}} g(t') = h(t')$
$(1-t')\underbrace{(b-a)}_{>0} + \underbrace{t'}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1-t' = 0 \Rightarrow t' = 1 \\ t' = 0 \end{array} \right. \Big/ 1 = 0$ Άτοπο
$1-t' \geq 0$
$t' \geq 0$

Άρα $H(t) \neq 0\ \forall t \in [0,1]$, $H =$ συνεχής $\Rightarrow$ η H Διατηρεί Σταθ. Πρόσημο
Προκύπτει από Λήμμα Bolzano

Επίσης $H(0) = f(a) - f(b) < 0$
$\Rightarrow H(t) < 0,\ t \in [0,1]$

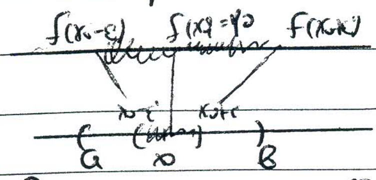
Άρα $H(1) < 0$, $f(x_1) - f(x_2) < 0$
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Α' Τρόπος (Μεγρεμπόντης, Απ. Γιαννούδακης)
ii) $I = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$
$f: I \to \mathbb{R}$ Γν. Μονότονη (από το i))

Έστω ότι η f Γν. Αύξουσα
& έστω $y_0 \in f(I)$ και $\varepsilon > 0$
διάστημα

Θα πρέπει να βρούμε $\delta>0$: αν $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta) \subseteq f(I)$
τότε $f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_0)-\varepsilon, f^{-1}(y_0)+\varepsilon)$

Για το $y_0 \in f(I)$ υπάρχει (ακριβώς) ένα $x_0 \in I$: $f(x_0)=y_0$



$f \nearrow$, $x_0 \in (\alpha,\beta) \Rightarrow \exists\ 0<\varepsilon'<\varepsilon$ $(x_0-\varepsilon', x_0+\varepsilon') \subseteq (\alpha,\beta)$

$(f(x_0-\varepsilon'), f(x_0+\varepsilon')) \overset{\circledast}{=} f(x_0-\varepsilon', x_0+\varepsilon')$ (f συνεχής κ $\nearrow$)

Από Άσκηση 10

$\circledast$

$y_0 = f(x_0) \in (f(x_0-\varepsilon'), f(x_0+\varepsilon'))$. Άρα $\exists\ \delta>0$: $(y_0-\delta, y_0+\delta) \subseteq (f(x_0-\varepsilon'), f(x_0+\varepsilon'))$

Έστω $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta) \overset{\circledast}{\Longrightarrow} y \in f((x_0-\varepsilon', x_0+\varepsilon'))$
Επομένως $f^{-1}(y) \in (x_0-\varepsilon', x_0+\varepsilon') = (f^{-1}(y_0)-\varepsilon', f^{-1}(y_0)+\varepsilon')$
$\subseteq (f^{-1}(y_0)-\varepsilon, f^{-1}(y_0)+\varepsilon)$
$0<\varepsilon'<\varepsilon$

Μάθημα 32 (18/12/2012)

Αντίστροφες συναρτήσεις: της $f_a(x)=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$ $x\in\mathbb{R}$
και των τριγωνομετρικών

1) Ορισμός των $\log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $(a>0, a\neq 1)$
Θεωρούμε $a>0$, $a\neq 1$ (a = σταθερό) $f_a(x)=a^x$ $x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη $\exists$ η αντίστροφη.

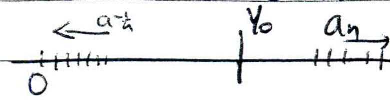
Θα αποδείξουμε ότι $f_a(\mathbb{R})=+\infty$ »Έτσι θα μπορούμε να την αντιστρέψουμε γνωρίζοντας το Π.Ο της αντίστροφης«

$a>1$ f_a γν. αύξουσα (+ συνεχής). $f(\mathbb{R}) \subseteq (0,+\infty)$
»Θα πάρουμε ένα σημείο από το $(0,+\infty)$ κ θέλουμε να αποδείξουμε ότι ανήκει στο $f(\mathbb{R})$

Έστω $y_0 \in (0,+\infty)$

$\lim_n a^n = +\infty$ (από $\lim \theta^n = +\infty$ όταν $\theta > 1$)

$\lim_n a^{-n} = 0$



∃ $n_1 \in \mathbb{N}$ $a^{n_1} > y_0$ $n \geq n_1$

∃ $n_2 \in \mathbb{N}$ $a^{-n_2} < y_0$ $n \geq n_2$ $\qquad n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$f(-n_0) = a^{-n_0} < y_0 < a^{n_0} \leq f(n_0)$

Θεώρημα Ενδ. Τιμής:

∃ $x_0 \in \mathbb{R}$: $y_0 = f(x_0)$ $\Rightarrow$ $y_0 \in f(\mathbb{R})$

$(0,+\infty) \subseteq f(\mathbb{R}) \subseteq (0,+\infty)$

$\Rightarrow f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$

Από το Θεώρημα Αντιστρόφου ∃ $f_a^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

f_a^{-1} συνεχής

Συμβολίζουμε $f_a^{-1} = \log_a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

Για $0<a<1$, $\log_a$ γνησ. φθίνουσα ($a^x \downarrow$)

Για $a>1$, $\log_a$ γνησ. αύξουσα ($a^x \uparrow$)

$\boxed{\text{Για } a=e \ \ \log_e \text{ συμβολίζεται με } \log \text{ ή } \ln}$

$a^x = y \iff f_a(x) = y \iff x = f_a^{-1}(y) \iff x = \log_a(y)$

Ιδιότητες της $\log_a$ ($a \neq 1, a > 0$)

1) $\log_a a = 1$ Το a εις την ___ να δίνει a

$\log_a 1 = 0$ Το a εις την ___ να δίνει 1

2) $\log_a(x^q) = q \log_a(x)$ $q \in \mathbb{Q}$

Ιδιαιτέρως $n \in \mathbb{N}$ $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

Απόδειξη

$a^{q\log_a x} = (a^{\log_a x})^q = x^q \Rightarrow \log_a(a^{q\log_a x}) = \log x^q$

$\Rightarrow \log_a(x^q) = q\log_a(x)$

3) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$x_1 = \log_a(xy) \to a^{x_1} = xy$
$x_2 = \log_a(x) \to a^{x_2} = x$
$x_3 = \log_a(y) \to a^{x_3} = y$

Έχουμε λοιπόν $a^{x_1} = a^{x_2+x_3}$
$\Rightarrow x_1 = x_2 + x_3$
$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Γενικά $\log_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \log_a(x_1) + \dots + \log_a(x_n)$ $n \in \mathbb{N}$
Απόδειξη με επαγωγή

4) Αλλαγή Βάσης
$a, b > 0$ $a, b \neq 1$
$\log_b(x) = \log_a(x)\log_b(a)$

$\log_a(x) = x_1 \Rightarrow x = a^{x_1}$
$\log_b(x) = x_2 \Rightarrow x = b^{x_2}$
$\Rightarrow a^{x_1} = b^{x_2} \Rightarrow x_1 \log_b a = x_2$

5) Ανισότητα Jensen ✪✪✪
Έστω $a > 1$ (π.χ. $a = e$) και $x_1, \dots x_n > 0$
Τότε $\log\left(\frac{x_1 + x_2 \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n}$

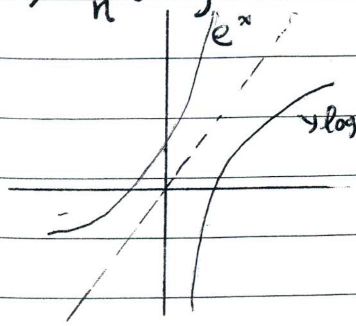
Ισότητα ισχύει $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Ιδιαιτέρως $\log\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2}{2}$ » Για $a > 1$
$\log_a$ γνησίως κοίλη «

Λύση:

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \xRightarrow[a>1]{\log\uparrow} \log\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \le \log\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)$$

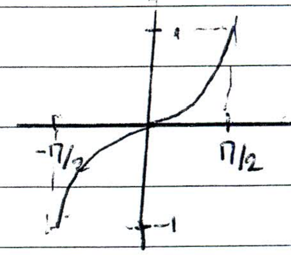
$$\Rightarrow \frac{1}{n}(\log x_1+\dots+\log x_n) \le \log\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)$$



$f_e(x)=e^x$, $f_e^{-1}=\log_e$

2 Αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

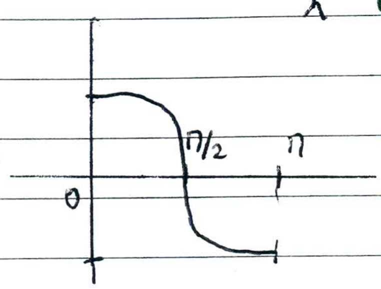
ημ: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,+1]$



$\xRightarrow[\text{Αντιστ}]{\text{Θεωρ}}$ ∃ η αντίστροφη

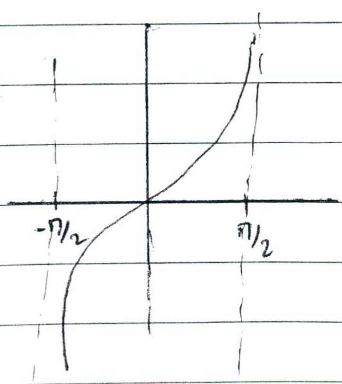
τοξημ: $[-1,+1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\uparrow$ συνεχής



συν: $[0,\pi] \to [-1,+1]$ $\downarrow$, συνεχής

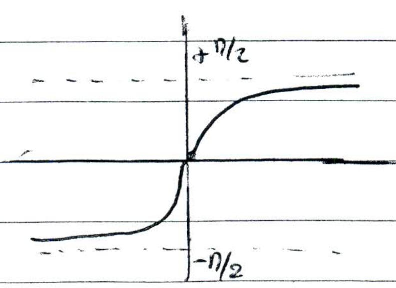
η αντίστροφη τοξσυν: $[-1,+1] \to [0,\pi]$ $\downarrow$ συ



εφ: $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ $\uparrow$ συνεχής

η αντίστροφη τοξεφ: $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\uparrow$ συνεχής

$\Downarrow$



<u>Ορισμός</u> της $g_\theta(x) = x^\theta$ $x>0$ με $\theta\in\mathbb{R}$

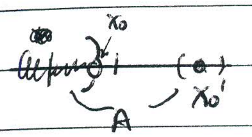
$x^\theta = e^{\theta\ln(x)}$

Από την ιδιότητα 2) των λογα. έχαμε ότι $x^q = e^{q\ln(x)}$ $q\in\mathbb{Q}$

Όρια. Σχέση ορίου και Συνέχειας

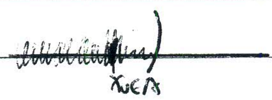
<u>Ορισμός</u>: Το $x_0\in\mathbb{R}$ καλείται σημείο Συσσώρευσης του A

$\overset{op}{\iff} \forall\delta>0\ ((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\})\cap A \neq \emptyset$



$\iff \forall\delta>0\ \exists x\in A : 0<|x-x_0|<\delta$

ή όταν $x_0\in A \to$



<u>Πρόταση</u>: $x_0\in\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{R}$

Τα εξής είναι ισοδύναμα i) x_0 είναι Σ.Συσσώρευσης του A

ii) $\forall\delta>0$ $(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap A$ είναι άπειρο σύνολο

iii) $\exists a_n\in A$, $a_n\neq x_0$

$(a_i\neq a_j,\ i\neq j)$ ώστε $\lim_n a_n = x_0$

<u>Ορισμός</u>

Εάν $x_0\in A$ και το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης, αυτό καλείται μεμονωμένο σημείο του A. // Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης συμβολίζεται με $\boxed{A'}$

<u>Παραδείγματα</u>

1) $A=(0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)\cup(1,2)$, $[0,1]$, $(0,1)\cup\{2,3\}$

$A'=[0,2]$ $A'=[0,1]$ ↓ μεμονωμένα σημεία

$(0,1)' = [0,1] = [0,1)'$ $A'=[0,1]$

» Θα κοιτάμε ακολουθίες που "συγκλίνουν κάπου"

2) $\mathbb{Q}\cap[0,1) = A$, $A' = \{$όλα $a\in\mathbb{R} : \exists q_n\in\mathbb{Q}\cap(0,1),\ q_n\neq a$ με $q_n\to a\} = [0,1]$

Για κάθε ∃ ακολουθία ρητών, αρρήτων που συγκλίνει

Μάθημα 33 (19/12/2012)

Υπενθύμιση

$A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$

Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης (Σ.Σ) του A $\overset{\text{ορισμός}}{\iff}$

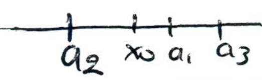
$\forall \delta>0\ ((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\})\cap A\neq\emptyset$

$\iff \forall\delta>0\ \exists\, x\in A\ \ 0<|x-x_0|<\delta$

Το σύνολο των σημείων Συσσώρευσης συμβολίζεται A'

Άσκηση

Το $x_0\in\mathbb{R}$ είναι Σ.Σ του A $\iff \exists\, x_n\in A$ με $x_i\neq x_j$ για $i\neq j$, $x_n\neq$ ώστε $\lim_n x_n=x_0$



Λύση: ($\Leftarrow$) $\delta>0$ $\lim_n x_n=x_0 \Rightarrow \exists\, n_0\in\mathbb{N}: 0<|x_{n_0}-x_0|<\delta$, $x_{n_0}\in A$

Άρα το x_0 είναι Σ.Σ του A

($\Rightarrow$) $\delta=1$ $\exists\, x_1\in A: 0<|x_1-x_0|<1$

$\delta=\min\{1/2, |x_1-x_0|\}>0$, $\exists\, x_n\in A: 0<|x_2-x_0|<\delta$ — $x_1\neq x_2$, $|x_2-x_0|$

$n\geq 2$ $\epsilon\min\{\frac{1}{n}, |x_{n-1}, x_0|\}>0$

... Δημιουργούμε ακ $(x_n)_n$, $x_n\in A$ με $x_i\neq x_j$, $i\neq j$, $x_n\neq x_0$ ώστε $\lim_n x_n=x_0$

Παραδείγματα (... συνέχεια)

3) $A=\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\}$; $A'=\{a\in\mathbb{R}: \exists\, x_n\in A,\ x_n\neq x_0\ \lim_n x_n=a\}=\{0\}$

4) $B=\{(1+\frac{1}{n})^n\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{(\frac{n}{1+n})^n: n\in\mathbb{N}\}\cup\{(\frac{2}{3})^n: n\in\mathbb{N}\}\cup\{\sqrt[n]{n^2+1}: n\in\mathbb{N}\}$

$B'=\{e, \frac{1}{e}, 0, 1\}$

5) $A=\mathbb{N}$, $\mathbb{N}'=\emptyset$ / $B=\mathbb{Q}$, $r=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})'=\mathbb{R}$

σ) $A=(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$ 

$\alpha<\beta<\gamma$ $\quad A'=[\alpha,\gamma]$

(I) Ορισμός ορίου συνάρτησης στο $x_0\in\mathbb{R}$

$f:A\to\mathbb{R}$ $\quad \boxed{x_0\in A'}$ »Μας απασχολεί η γύρω περιοχή του σημείου«

1) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0:$
αν $x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$
$\Longleftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0:$
αν $x\in((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})\cap A$ τότε $f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$

⊛ Ο ορισμός έχει έννοια διότι $\exists^{ου}\ x\in A:\ 0<|x-x_0|<\delta$ $(x_0\in A')$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall M>0\ \exists\ \delta=\delta(M,x_0)>0:$
αν $x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $f(x)>M$

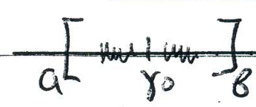
3) $\lim f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall M>0\ \exists\ \delta=\delta(M,x_0)>0$
αν $x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $f(x)<-M$

II) Πλευρικά όρια

$f:A\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$

Ορισμός: i) Το x_0 είναι δεξιό Σ.Σ. του $A \Longleftrightarrow \forall\delta>0\ (x_0,x_0+\delta)\cap A\neq\emptyset$
ii) Το x_0 είναι αριστερό ΣΣ του $A \Longleftrightarrow \forall\delta>0\ (x_0-\delta,x_0)\cap A\neq\emptyset$

πχ. $A=[\alpha,\beta]$
Το α ΔΣΣ και όχι ΑΣΣ
β ΑΣΣ και όχι ΔΣΣ
Τυχαίο $y\in(\alpha,\beta)$ ΑΣΣ+ΔΣΣ



» Πλευρικά
⊛ Παράγωγο μπορώ μόνο στο y διότι εκεί μπορώ να βρω δεξιά και αριστερά παράγωγο ενώ στα άκρα δε γίνεται

Ορισμός πλάγιων - πλευρικών ορίων

1) $x_0 \in A'$, x_0 ΔΣΣ, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \iff \forall \varepsilon>0$
$\exists\, \delta>0$: αν $x \in (x_0, x_0+\delta)\cap A$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

Ανάλογα $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ (ή $-\infty$)

2) $x_0\in A'$, ΑΣΣ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$:
αν $x\in(x_0-\delta, x_0)\cap A$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

Ανάλογα $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty\ (-\infty)$

Παρατήρηση!!

Έστω $a\in\mathbb{R}$ ΔΣΣ και όχι ΑΣΣ του A
Εάν $\lim_{x\to a^+} f(x)=\ell\ (+\infty$ ή $-\infty)$ τότε $\exists \lim_{x\to a} f(x)=\ell\ (+\infty$ ή $-\infty)$

—

$\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$: αν $x\in(x_0, x_0+\delta)\cap A \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$
Άρα αν $x\in((x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\})\cap A \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

Πρόταση

$f: A\to\mathbb{R}$, x_0 ΔΣΣ και ΑΣΣ του A
τότε: $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ $(+\infty$ ή $-\infty) \iff \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x), \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και είναι ί

Ⅱ Ορισμός ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ (ή $-\infty$)

$\boxed{A}$ Έστω $f: A\to\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$ και όχι άνω φραγμένο σύνολο (π.χ. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \iff \forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0$: αν $x\in A$, $x>\delta$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

2) $\lim_{x\to+\infty} = +\infty \iff \forall M>0, \exists\,\delta>0$: αν $x\in A$, $x>\delta$ τότε $f(x)>M$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \iff \forall M>0, \exists\,\delta>0$: αν $x\in A$, $x>\delta$ τότε $f(x)<-M$

$\boxed{B}$ Έστω $f: B \to \mathbb{R}$ και B όχι κάτω φραγμένο σύνολο

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: αν $x \in B$, $x < -\delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0$: αν $a \in B$, $x < -\delta$ τότε $f(x) > M$

3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0$: αν $x \in B$, $x < -\delta$, τότε $f(x) < -M$

Σημείωση

Εάν $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ δηλαδή η f είναι ακολουθία οι ορισμοί για όρια ακολουθιών και όρια συναρτήσεων για $x \to +\infty$ συμπίπτουν

ΑΡΧΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Τα εξής είναι ισοδύναμα i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

ii) $\forall$ ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \neq x_0$ και $\lim_n x_n = x_0$ τότε $\lim_n f(x_n) = \ell$

2) $f: A \to \mathbb{R}$, A = όχι άνω φραγμένο. Ανάλογα

3) $f: B \to \mathbb{R}$, B = όχι κάτω φραγμένο ανάλογα

Άλγεβρα Ορίων

Ανάλογες ιδιότητες με τα όρια ακολουθιών ή για τις συνεχείς συναρτήσεις εφ' όσον είναι επιτρεπτές οι πράξεις μεταξύ ορίων

Ασκήσεις

1) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$. Τότε $\exists\ \delta > 0$ τ.ω. αν $x \in A$ $0 < |x - x_0| < \delta$

τότε $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$

Λύση:

$\varepsilon = \frac{\ell}{2}$. Τότε $\exists\ \delta > 0$: αν $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε

$|f(x) - \ell| < \frac{\ell}{2}$, δηλ. $+\ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2} = \frac{3\ell}{2}$

2) $f: A \to \mathbb{R}$, A όχι άνω φραγμένο $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell > 0$

Τότε $\exists\ \delta > 0$: αν $x \in A$, $x > \delta$ τότε $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$ όμοια

3) $a_n = \log\left(\sqrt[n]{n^3+n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$, $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$b_n = e^{\sqrt[n]{n^2+5}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, $\lim_n b_n = 1$

$\lim \sqrt[n]{n^2+n} = 1$, $\lim_n \frac{(-1)^n}{3^n} = 0$ $\left(\theta = -\frac{1}{3}, |\theta| = \frac{1}{3} < 1\right)$

$\gamma_n = \sqrt[n]{n^3+n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \longrightarrow 1$

H log είναι συνεχής $\xRightarrow{\text{ΑΥ}}$ $\log(\gamma_n) \xrightarrow[n]{} \log 1 = 0$

=

$\lim \sqrt[n]{n^2+5} = 1$. H $e^{(\cdot)}$ είναι συνεχής $\xRightarrow{\text{ΑΥ}}$ $e^{\sqrt[n]{n^2+5}} \longrightarrow e^1 = e$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e}$ Άρα $\lim b_n = 1$

4) i) $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$ ΔΕΝ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \eta\mu x$

ii) $g(x)=\eta\mu\frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ Δεν $\exists \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0^-}\eta\mu\frac{1}{x}$

Λύση:

i) $x_n = 2\pi n \xrightarrow[n]{} +\infty$, $f(x_n)=0 \xrightarrow[n]{} 0$ | $0\neq1$ Δεν $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$x_n = 2\pi n+\frac{\pi}{2} \to +\infty$, $f(y_n)=1 \xrightarrow[n]{} 1$

ii) $x_n' = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n' = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}} > 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n')=0\neq1=\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n')$

Άρα $\nexists \lim\limits_{x\to0^+}\eta\mu\frac{1}{x}$ Όμοια από αριστερά

5) Έστω $f,g: A\to\mathbb{R}$, $x_0\in A'$ (η A = όχι άνω φραγ. ή A όχι φραγτ)

$\lim f(x)=0$ και $\exists M>0 : |g(x)|\leq M$ $x\in A$

Τότε $\lim f(x)g(x)=0$

Λύση:

$\varepsilon>0$ $\lim f(x)=0 \Rightarrow |f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$ για $x\in A$ με $(\dots)$

Τότε $|f(x)g(x)|<\frac{\varepsilon}{M}M$ για $x\in A$ με $(\dots)$

Άρα $\lim f(x)g(x)=0$

6) $h(x)=x^k\eta\mu\frac{1}{x}$, $x\neq0$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, k = σταθερό

$\lim\limits_{x\to0} h(x)=0$

Μάθημα 34 (21/12/2012)

Κριτήριο Παρεμβολής για όριο συνάρτησης

Ας γράψουμε $\lim f(x)$ για ένα από τα

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ ($f: A \to \mathbb{R}$, x_0 Σ.Σ του A)

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ($f: A \to \mathbb{R}$, A όχι άνω φραγμένο)

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ($f: A \to \mathbb{R}$, A όχι κάτω φραγμένο)

i) Έστω f, g, h με $g(x) \leq \varphi(x) \leq h(x)$ $x \in A$ ις $\lim g(x) = \lim h(x) = \ell \in \mathbb{R}$
Τότε $\exists$ $\lim \varphi(x) = \ell$

ii) Έστω $g(x) \leq \varphi(x)$ $x \in A$, $\lim g(x) = +\infty$
Τότε $\lim \varphi(x) = +\infty$

iii) Έστω $\varphi(x) \leq h(x)$ $x \in A$, $\lim h(x) = -\infty$
Τότε $\lim \varphi(x) = -\infty$

Απόδειξη: Ορισμός ή Α.Μ.

Σχέση ορίου και συνέχειας συνάρτησης

$f: A \to \mathbb{R}$ $\boxed{x_0 \in A}$

- x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0
- x_0 είναι Σ.Σ του A. Τότε: η f συνεχής στο $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

($\Rightarrow$) $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$: αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Επειδή $x_0 \in A'$ $\exists$ $x \in A$: $x \neq x_0$ με $0 < |x - x_0| < \delta$
Άρα για $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Συνεπώς $\exists$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

($\Leftarrow$) Μόνοι μας

» Όλα βγαίνουν βάσει ορισμού
Μόνο προσοχή στα Σ-Συσσώρευσης

Πρόταση/Άσκηση

(Συνέπειες για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, των αντίστροφων τους, της εκθετικής, της λογαριθμικής)

Θα χρειαστούμε τα εξής:

α) $\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ Πρωτογενής! Απόδειξη μέσω Γεωμετρική

β) i) $a > -1 \Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na$, $n \in \mathbb{N}$ (Bernoulli)

ii) $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n-1})^n$

iii) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς και $f(q) \leq g(q)$ $\forall q \in \mathbb{Q}$.
Τότε $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Λύση του iii) $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists\, q_n \in \mathbb{Q} : q_n \to x_0$

f, g συνεχείς $\xrightarrow{AM}$ $f(q_n) \xrightarrow[n]{} f(x_0)$, $g(q_n) \xrightarrow[n]{} g(x_0)$

με $f(q_n) \leq g(q_n)$ $n \in \mathbb{N}$

$\underline{f(x_0) \leq g(x_0)}$

Ασκήσεις

αλλά αποδείχθει ότι $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1}$ » Λάθος το De l'Hospital!! διότι δε γνωρίζω $(\eta\mu)'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

και $\lim_{x \to x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \sigma\upsilon\nu x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ \lim_{x \to 0} 1 = 1\end{array}\right| \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \frac{2\eta\mu(\frac{x-x_0}{2})\,\sigma\upsilon\nu(\frac{x+x_0}{2})}{x - x_0} = \frac{\eta\mu(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}} \underbrace{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{\text{συνεχής}} \xrightarrow{x_0} \sigma\upsilon\nu(x_0)$$

6) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$ και $\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}$ (το αναγει στο πρώτο)

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $1+x\le e^x\le\frac{1}{1-x}$ $x\in(0,1)$

• $x=\frac{1}{n}\in(0,1)$ $(n\ge 2)$

Γνωρίζουμε ότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e\le\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ $n\ge 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e^{\frac{1}{n}}\le\frac{n}{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\quad (1)$$

• $x=\frac{m}{n}\in(0,1)$, $1\le m<n$ $(n\ge 2)$

Από την (1) την υψώνουμε εις την m

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m\le e^{\frac{m}{n}}\le\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^m}\le\frac{1}{1-\frac{m}{n}}$$

Κ έχουμε ότι $1+\frac{m}{n}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$ από την Bernoulli

Άρα για $q\in(0,1)$ ισχύει $1+q\le e^q\le\frac{1}{1-q}$

$\varphi(x)=1+x$, $h(x)=e^x$, $g(x)=\frac{1}{1-x}$, $x\in(0,1)$

είναι συνεχής. Άρα $1+x\le e^x\le\frac{1}{1-x}$ $x\in(0,1)$!

$1\le\frac{e^x-1}{x}\le\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\frac{1}{1-x}$ $x\in(0,1)$ (2)

$\lim_{x\to 0^+}1=1=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$

$t\in(-1,0)$ Τότε $-t\in(0,+1)$

από (2) $1\le\frac{e^{-t}-1}{-t}\le\frac{1}{1-(-t)}$

$\xRightarrow{e^t>0} e^t\le\frac{1-e^t}{-t}\le\frac{e^t}{1+t}$

$\lim_{t\to 0^-}e^t=1=\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t}{1+t}$

$\Rightarrow\exists\lim_{t\to 0^-}\frac{1-e^t}{-t}=1$

Δηλ. $\lim_{t\to 0^-}\frac{e^t-1}{t}=1$

Άρα ∃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

• $\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}\cdot\lim_{x-x_0\to 0}\frac{e^{(x-x_0)}-1}{x-x_0}=e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}$

Ασκήσεις (Όριο - Συνέχεια, ΘΕΤ. ΘΜΕΤ)

1) $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής με $f(x)\neq x$ $\forall x\in[0,+\infty)$
Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$f(x)-x\neq 0$ $\forall x\in[0,+\infty)$. Άρα η $f(x)-x$ διατηρεί πρόσημο για $x\in[0,+\infty)$
Λήμμα Bolzano

(Θέμα: Επαναληπτικές Σεπτέμβριος 2012)

$f(x)>x,\ x\geq 0$
$0\leq f(x)<x,\ x\geq 0,\ 0\leq f(0)<0$. Αδύνατο

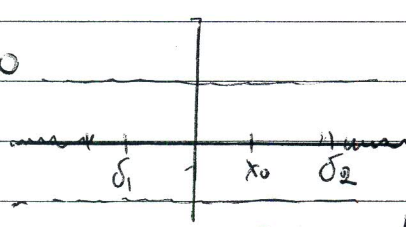
Άρα $\left.\begin{array}{l} f(x)>x,\ x\geq 0 \\ \lim_{x\to+\infty}x=+\infty \end{array}\right\}$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

» Εφαρμογή Μεγ.-Ελαχ. → ΘΜΕΤ
Όμως ΘΜΕΤ κλειστό, φραγμένο αλλά έτσι το $\mathbb{R}$ πρέπει να το περιορίσουμε σε κλειστό + φραγμένο.

$f\equiv 0$, $\xi\in\mathbb{R}$, $f(\xi)\leq f(x)\leq f(\xi)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Έστω ότι ∃ $f(x_0)>0$



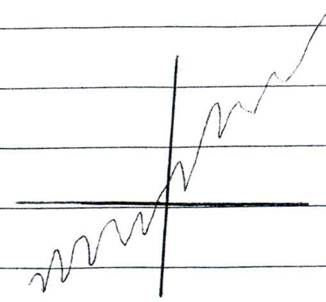
Επειδή $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$
$\overset{\varepsilon=f(x_0)}{\Longrightarrow}$ $\delta_2>0$, $\delta_2>x_0$ ώστε αν $x>\delta_2$ έχουμε $f(x)<f(x_0)$
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ $\delta_1<x_0$ ώστε αν $x<\delta_1$ έχουμε $f(x)<f(x_0)$

$f:[\delta_1,\delta_2]\to\mathbb{R}$ συνεχ. $\overset{\text{ΘΜΕΤ}}{\Longrightarrow}$ ∃ $\xi\in[\delta_1,\delta_2]$: $f(\xi)\geq f(x)$, $x\in[\delta_1,\delta_2]$

$x\in\mathbb{R}$
- $x<\delta_1$ $f(x)<f(x_0)\leq f(\xi)$
- $x>\delta_2$ $\Rightarrow$ $f(x)<f(x_0)\leq f(\xi)$
- $\delta_1\leq x\leq\delta_2$ $\Rightarrow$ $f(x)\leq f(\xi)$

$f(\xi)\geq f(x_0)$
$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\leq f(\xi)$
ξ σημείο ολ. μεγίστου

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



Τότε η f είναι επί δηλ. $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Ιδιαιτέρως

[Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει ρίζα]

1. $y_0 > 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \exists\, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_2) > y_0$

$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \Rightarrow \exists\, x_1 \in \mathbb{R}: f(x_1) < y_0$

Άρα $f(x_1) < -y_0 < 0 < y_0 < f(x_2)$

f = συνεχής $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ $f(\xi_1) = y_0$, $f(\xi_2) = 0$, $f(\xi_3) = -y_0$

Επομένως η συνάρτηση είναι επί διότι $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$

Ιδιαιτέρως $P(x) = a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_{2n+1} > 0$

$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ »Το όριο του Μεγιστοβάθμιου«

Άρα $\exists\, \xi \in \mathbb{R}: P(\xi) = 0$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

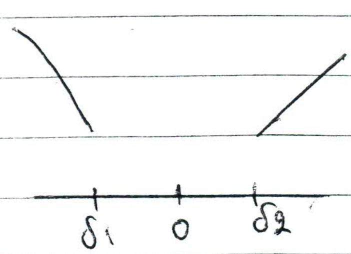
Τότε η f έχει ελάχιστη τιμή.

Ιδιαιτέρως το $P(x) = a_{2n} x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_{2n} > 0$

Έχει ελάχιστη τιμή

$f(x) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$ $\exists\, \delta_2 > 0: f(x) > f(0)$ για $x > \delta_2$

$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ $\exists\, \delta_1 < 0: f(x) < f(0)$ για $x < \delta_1$



$f: [\delta_1, \delta_2] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

$\exists\, \xi \in [\delta_1, \delta_2]: f(\xi) \le f(x)$, $x \in [\delta_1, \delta_2]$

$x \in \mathbb{R}$:

$x < \delta_1 \Rightarrow f(x) > f(0) \ge f(\xi)$

$\to x > \delta_2 \Rightarrow f(x) > f(0) \ge f(\xi)$

$\delta_2 \ge x \ge \delta_1$ $f(x) \ge f(\xi)$