Καλή Χρονιά !!!

180

ΜΑΘΗΜΑ 35 (7/1/13) ΔΕΥΤΕΡΑ

Παράγωγος συνάρτησης

$f: I \to \mathbb{R}$, $\boxed{I = \text{διάστημα}}$ όχι μονοσύνολο.

Εφαρμογές της παραγώγου

- •) Μελέτη συνάρτησης (αυξ, φθ., κοίλη, κυρτή)
- •) Τοπικά ακρότατα •) υπολογισμός ορίων (De l'Hospital)
- •) υπολογισμός ολοκληρώματος (Θ. Θ. Α. Λ.) θεμελιώδης θεώρημα απειροστικού λογισμού
- •) θεώρημα TAYLOR
- •) ΑΠΕΙ ΙΙΙ

Ορισμός: $f: I \to \mathbb{R}$, $I = $ Διάστημα (απαραιτήτως), $x_0 \in I$.

Θεωρούμε το $I - \{x_0\}$. Τότε το x_0 είναι σ.σ. του $I - \{x_0\}$.

Ορίζουμε συνάρτηση $g_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in I - \{x_0\}$

($g_{x_0}(x) = $ συνάρτηση κλίσης στο x_0).

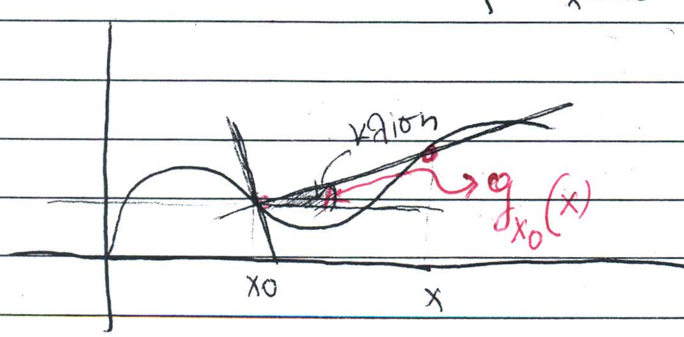
Αφού το x_0 είναι σ.σ. έχει έννοια να παίρνουμε όριο.

Εάν $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (\in \mathbb{R})$ τότε αυτό καλείται

παράγωγος της f στο x_0, συμβολίζεται $\boxed{f'(x_0)}$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$

(ο ορισμός με ε-δ): $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$: αν $x \in I$

με $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$



Διακρίνω Περιπτώσεις

(I) περίπτωση (⊛ √ για το Rolle) $\Rightarrow I=[\alpha,\beta]$, $(\alpha<\beta)$

1) Έστω $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Τότε το x_0 είναι Αρ. σ.σ + Δεξί σ.σ.. Τότε ορίζονται τα πλευρικά όρια (το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος/πεδίου ορισμού).

→ Εάν $\exists \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ καλείται δεξιά παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'_+(x_0)$.

→ Εάν $\exists \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ καλείται αριστερή παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται $f'_-(x_0)$

ΜΟΝΟ όταν το x_0 είναι εσωτερικό ορίζονται τα πλευρικά όρια!!!

Ισχύει το εξής: $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$. $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ και $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ τότε $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

2) Έστω $x_0=\alpha$, Τότε x_0 είναι Δεξί σσ και όχι αριστερό σσ. Τότε $f'(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$. Αυτή είναι ουσιαστικά η δεξιά παράγωγος, την άλλη δεν έχει νόημα να την βρούμε.

3) Έστω $x_0=\beta$, Τότε x_0 είναι Αριστερό σ.σ. και όχι δεξί σ.σ. Τότε $f'(\beta)=\lim\limits_{x\to\beta}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$

⊛ Παρατήρηση/Πρόταση Καραθεωδορή (sos για Ανει III)

Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$. Τότε Τ.Ε.Ε.Ι., $x_0\in(\alpha,\beta)$

i) $\exists f'(x_0)=\gamma$

ii) $\exists \varphi:(-\delta,\delta)\to\mathbb{R}$ $(\delta>0:(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq I)$ ώστε $f(x_0+h)=f(x_0)+\gamma h+h\varphi(h)$ για $h<\delta$ όπου $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\varphi(0)=0$

$$f(x)=f(x_0)+\gamma(x-x_0)+\overbrace{(x-x_0)\varphi(x-x_0)}^{\to 0}$$

Δηλ. $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ (εξίσωση ευθείας)!

Απόδειξη: (i⇒ii)

$\gamma=f'(x_0)$.

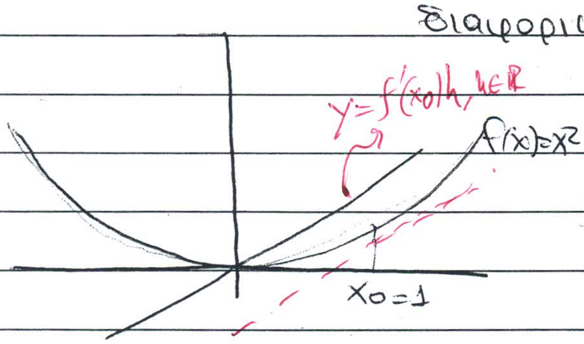
$$\varphi(h)=\begin{cases}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\gamma, & h\neq 0\\ 0, & h=0\end{cases}\quad, h\in(-\delta,+\delta),\ ((x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq I)$$

Τότε $f(x_0+h)=f(x_0)+\gamma h+h\varphi(h)$, $|h|<\delta$.

$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\varphi(0)=0$

(ii⇒i): Το αντίστροφο.

⊛ Σημείωση: Την ευθεία $y=f'(x_0)\cdot h$, $h\in\mathbb{R}$ την καλούμε διαφορικό της f στο x_0, συμβολίζεται $df(x_0)$.



Πχ: $df(1)(h)=2h$

$df(2)(h)=4h$.

Ασκήσεις

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(0)=f'(0)=0$.

Νδο $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} f\left(\frac{3^n}{n!}\right)=0$.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(0)=f'(0)=0$

Νδο $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{2^n\cdot n!} f\left(\frac{2^n n!}{n^n}\right)=0$

Λύσεις: $0=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f(0)=0}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ (1)

Από ΑΜ αν $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$ έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=0$ (2)

1) $x_n=\frac{3^n}{n!}$. Αρκεί νδο η $x_n\to 0$.

Θα χρησ. κριτήριο του λόγου.

$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{3^n}=\frac{3}{n+1}\xrightarrow[n]{} 0<1$ Άρα $\lim x_n=\lim\limits_n \frac{3^n}{n!}=0$ (3)

Απο (2), (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{3^n}{n!}\right)}{\frac{3^n}{n!}}=0$ Τέλος

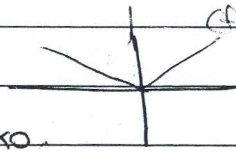
2) $y_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$, $\frac{|y_{n+1}|}{|y_n|}\overset{\circledast}{\xrightarrow[n]{}}\frac{2}{e}<1$ (4)

$\circledast$ $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}\to\ldots=\frac{2}{e}$

Άρα (2),(4) ... Τέλος

Ασκήσεις

1) $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$



Αναζητώ παράγωγο στο x_0.

- Για $x_0\neq 0$

• $x_0>0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$

• $x_0<0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-x-(-x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}-1=-1$

Για $x_0=0$:

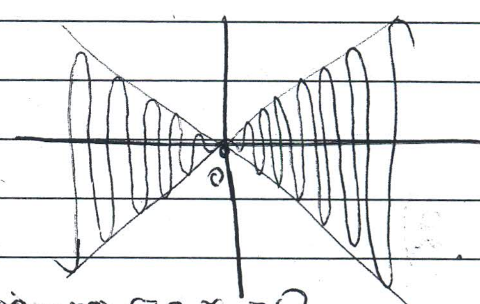
$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ \dots\ =-1$

Άρα η f δεν έχει παρ στο $x_0=0$

Άρα αφού $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ $\boxed{\text{δεν}}$ υπάρχει η παράγωγος στο x_0.
Η συνάρτηση f λοιπόν είναι συνεχής και δεν έχει παράγωγο στο x_0

2) $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$



Ναο ∄ η δεξιά παράγωγος στο $x_0=0$
—||— αριστερή —||—

Λύση: Παίρνουμε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu\frac{1}{x}$ Δεν υπάρχει

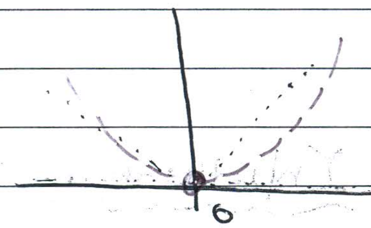
(Το $\eta\mu\frac{1}{x}$: $x_n=\frac{1}{2\pi n}$, $y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$)

ομοίως και η αριστερή

3) $k \geq 2$, k = σταθερό, $f_k(x) = \begin{cases} x^k \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ / $f_k'(0) = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{k-1} \eta\mu \frac{1}{x} \xrightarrow{0 \cdot \varphi\varrho} 0$

4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, αναζητώ σημεία παραγώγισης.



- Πρέπει να ελέγξω τη συνέχεια
Η f είναι ασυνεχής $\forall\ x_0 \neq 0$
Άρα αυτό πρόταση παραπάνω
για $x_0 \neq 0$ δεν έχουμε παράγωγο

(για $x_0 = 0$): $|f(x)| \leq |x|^2$ / $\varepsilon > 0$, $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$.
Για $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ / f συνεχής στο $x_0 = 0$

- Για την παράγωγο:

$x_0 \neq 0$: $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq |x|$.

$\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ Τότε αν $|x - 0| < \delta$ τότε $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| < \varepsilon$

Άρα $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

5) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ -x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Το μόνο σημείο συνέχειας είναι το 0.
Μάλι εδώ $f'(0)=0$
Αλλά εδώ $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \underset{\text{εχω} \leq}{=} |x|$

Σημείωση: Υπάρχουν συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς και δεν $\exists$ σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ που να $\exists$ η δεξιά και η αριστερή παράγωγος. Άρα δεν υπάρχει παράγωγος.
Είναι οι συναρτήσεις τύπου Weierstrass–Mandelbrot.

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\boxed{\text{Σχέση Συνέχειας – Παραγώγισης}}$
$f:I\to\mathbb{R}$, I=διάστημα, $x_0\in I$ και $\exists$ η παράγωγος στο x_0. Τότε η f είναι σίγουρα συνεχής στο x_0.

!!! ⊛ Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά !!!!

Απόδειξη: (α' τρόπος) ← σαν του σχολείου.
$x\neq x_0, x\in I$: $f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$

Άρα $\exists \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))$
$=0\cdot f'(x_0)=0$.
Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη (Β' τρόπος): από παρατήρηση Καραθεοδωρή.

$f'(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varphi(x-x_0)$, $\varphi(x-x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 = \varphi(0)$

Για $\varepsilon = 1$ $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. αν $|x-x_0|<\delta$, $x \in I$, $|\varphi(x-x_0)|<1$

Επομένως θα έχουμε $|f(x)-f(x_0)| \leq (|f'(x_0)|+1)|x-x_0|$, $|x-x_0|<\delta$

Άλγεβρα των Παραγώγων (ίδια με των ορίων)

Έστω $f, g: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $\exists\, f'(x_0), g'(x_0)$.

Τότε i) $\exists\, (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

ii) $\exists\, (\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\exists\, (g \cdot f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

iv) $g(x) \neq 0$. Τότε $\exists \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

(*) Από (i), (ii) έχουμε ότι το σύνολο του παραγωγισίμων σε ένα σημείο αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Επιπλέον: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Η απόδειξη γίνεται με ε-δ ορισμό ή ΑΜ.

Από ΑΜ $= g^2(x)$ είναι $\exists\, g'(x_0)$. Άρα g συνεχής στο x_0 άρα $g(x_n) \to g(x_0)$.

Απόδειξη του (iv) Έστω $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$.

α) $\lim\limits_{x_n \to x_0} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = g'(x_0)$

β) $\frac{\frac{1}{g(x_n)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x_n - x_0} = -\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} \cdot \frac{1}{g(x_n) \cdot g(x_0)}$

$= -g'(x_0) \cdot \frac{1}{g^2(x_0)}$

Μάθημα 36 (α/ 1/ 13) Τετάρτη

Θεώρημα: Κανόνας της Αλυσίδας για την παραγώγιση σύνθετης συναρτήσεων.

$f:(\alpha,\beta)\to(\gamma,\delta)$, $x_0\in(\alpha,\beta)$, η f παραγ. στο x_0

$$\begin{array}{l} x_0\in(\alpha,\beta) \xrightarrow{f} (\gamma,\delta) \ni f(x_0) \\ \searrow^{g\circ f} \quad \mathbb{R} \quad \swarrow g \end{array}$$

$g:(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$, g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$

Τότε $\exists$ η $\boxed{(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}$

Απόδειξη: (Χρ. την παρατήρηση Καραθεοδωρή)

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί και $h_n \xrightarrow[n]{} 0$ με $(x_0+h_n)\in(\alpha,\beta)$, $h_n\neq 0$

Τότε $\lim\limits_{n} \dfrac{(g\circ f)(x_0+h_n)-(g\circ f)(x_0)}{h_n} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

Άρα (ΑΜ) $\exists\, (g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$.

Η f παραγωγίσιμη στο x_0, με $\lim\limits_{n} q_1(h_n)=0=q_1(0)$,
$f(x_0+h_n)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h_n+h_n\cdot q_1(h_n)$.

$t_n=f'(x_0)h_n+h_n q_1(h_n) \xrightarrow[n]{} 0$
Η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$
$g(f(x_0)+t_n)=g(f(x_0))+g'(f(x_0))t_n+t_n q_2(t_n)$

με $\lim\limits_{n} q_2(t_n)=0=q_2(0)$

$f(x_0+t_n) = f(x_0+k r_n)$.

$$g\circ f(x_0+h_n) = g\circ f(x_0) + g'(f(x_0))\cdot[f'(x_0)+q_1(h_n)]h_n + [f'(x_0)+q_1(h_n)]\cdot h_n \cdot q_2(t_n)$$

Διαιρώ με το h_n:

$$\frac{g\circ f((x_0+h_n)) - g\circ f(x_0)}{h_n} = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0) + [g'(f(x_0))q_1(h_n) + f'(x_0)+q_2(t_n)+q_1(h_n)q_2(t_n)]$$

$$\Big\downarrow n$$

$$g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

(Το $f(x_0+h_n) \in D_g$ γιατί είναι ανοιχτά τα σύνολα)

Άσκηση (sos), για το Θ. αντιστρόφως.
$f: I \to \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη και συνεχής με I = διάστημα.
ΝΔΟ i) αν $I=[a,b]$, $a\le b$, τότε $f(I)=[f(a), f(b)]$
ii) αν f γν. αύξουσα και $I=(a,b)$ τότε $f(I) = (\inf f((a,b)), \sup(f(a,b)))$
iii) πχ όπου f γν. αύξουσα και συνεχής με $f((a,b)) = (-\infty,+\infty)$
iv) πχ όπου η γν. αύξουσα και συνεχής όχι σταθερή
με $f((a,b))=[\gamma,\delta]$, $\gamma<\delta$

Λύση Άσκησης)
1) f συνεχής + αύξουσα, $I=[a,b]$
$f([a,b])$ = διάστημα από ΘΕΤ
|| διάστημα.
$f([a,b]) = [\gamma,\delta] = [\min f([a,b]), \max f([a,b])]$ (1)
από ΘΜΕΤ (πόρισμα του 1ου θεωρ. που λέει ότι είναι φραγμένη)
και αφού f αύξουσα (1) $= [f(a), f(b)]$

ii) $f((a,b)) = (\inf(f(a,b)), \sup(f(a,b)))$

$\cdot\, x \in (a,b)$ Τότε $f(x) \le \sup(f(a,b))$

Εάν $\inf(f(a,b)) = -\infty$ Τότε $f(x) > \inf(f(a,b))$
Εάν $\sup(f(a,b)) = +\infty$ Τότε $f(x) < \sup(f(a,b))$ $\forall x \in (a,b)$

Έστω ότι $\inf(f(a,b)) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\exists\, x_0 \in (a,b): \gamma = f(x_0)$,

(Πρέπει νδο $\gamma \notin f((a,b))$)

$x_0 \in (a,b)$: Έστω $a < y_0 < x_0$, ($\exists\, y_0$ γιατί $a < x_0$)

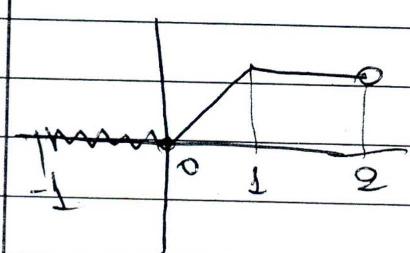
Τότε $\gamma \le f(y_0) < f(x_0) = \gamma$ Άτοπο

$\Downarrow$

f γν. αύξουσα

iii) $f((a,b)) = (-\infty, +\infty)$ πχ $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

iv) f αύξ, όχι γνήσια, $f((a,b)) = [\gamma, \delta]$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0] \\ x, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1,2) \end{cases}$$

$f((-1,2)) = [0,1]$

190

Θεώρημα: Παραγώγιση αντίστροφης

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, 1-1, συνεχής και $x_0 \in (a,b)$ όπου $\exists$ η $f'(x_0)$

Τότε ισχύουν τα εξής:

i) Εάν $f'(x_0) \neq 0$ τότε $\boxed{\exists (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}}$

ii) Εάν $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ Τότε η (f^{-1}) δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.

Απόδειξη:

i) (ΑΜ): Αρκεί ν.α.ο. εάν $y_n \in f((a,b))$ με $y_n \neq f(x_0)$ και $y_n \to f(x_0)$ τότε $\exists \lim_n \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Τότε (ΑΜ) $\exists (f^{-1})' f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

f συνεχής και "1-1" στο $(a,b) \Rightarrow \exists$ η (f^{-1}) και (f^{-1}) συνεχής
f γν. μονότονη

Το $y_n \in f((a,b)) \Rightarrow \exists x_n \in (a,b)$, $f(x_n) = y_n$ $(x_n \neq x_0$ ισχύει$)$

Τότε $x_n = f^{-1}(y_n) \xrightarrow[f^{-1} \text{ συνεχής}]{n} f^{-1}(f(x_0)) = x_0$.

$x_n \neq x_0$ / f παραγωγίσιμη στο x_0, $\lim_n \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$

$\cdot f'(x_0) \neq 0$, $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$

$$\| $$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)}$$

(A) Σημειώσεις

$\exists\ y_n \neq f(x_0)$ ώστε $y_n \to f(x_0)$, $y_n \in f((a,b))$ } ότι δηλ. το $f(x_0)$ είναι σ.σ του $f((a,b))$ = Ανοικτό διάστημα

Το $f(x_0)$ είναι σ.σ γιατί: $f((a,b))$ = ανοιχτό διάστημα εφ' όσον η f είναι γν. μονότονη + συνεχής.

Έστω $f'(x_0)=0$, πρέπει να δω υπάρχει $(f^{-1})'(f(x_0))$

Έστω ότι $\exists (f^{-1})'(f(x_0))$

Ισχύει $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $x\in(a,b)$.

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x_0))\cdot \underbrace{f'(x_0)}_{0}=1$

$0=1$ Αδύνατο.

Παραγώγιση των βασικών συναρτήσεων.

$f_1(x)=c$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=\eta\mu x$, $f_4(x)=e^x$ / a^x $(a>0, a\neq 1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Αποδείξεις

1) $f_1(x)=c$, $x_0\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c-c}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}0=0$ $\boxed{(c)'=0}$

2) $f_2(x)=x$

$x_0\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, $\boxed{(x)'=1}$

Άρα η $g(x)=x^k$ $(k \in \mathbb{N}, k=\text{σταθ})$.
Τότε $g'(x)=k \cdot x^{k-1}$ (μαθηματική επαγωγή)

$P(x)=a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
$P'(x)=n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1$

$Q(x)=\dfrac{a_n x^n + \cdots + a_0}{B_k x^k + \cdots + B_0}$ | Παραγωγίσιμο στο πεδίο ορισμού.

3) $f_3(x)=\eta\mu x$, $\boxed{(\eta\mu)'(x)=\sigma\upsilon\nu x}$ $x \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\eta\mu(x_0+h)-\eta\mu x_0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2\eta\mu\left(\frac{h}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{h}$ (1)

όμως $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\eta\mu\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = 1$ και $\lim\limits_{h \to 0} \sigma\upsilon\nu\left(x_0+\frac{h}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$

Άρα (1) $=\sigma\upsilon\nu(x_0)$

(Το όριο υπολογίζεται στο μάθημα 21/12/12 με την ανίσωση $\sigma\upsilon\nu x \le \frac{\eta\mu x}{x} \le 1$ στην περιοχή $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$)

Άρα $\exists$ $(\eta\mu)'(x_0)=\sigma\upsilon\nu(x_0)$

$g(x)=\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
$(\sigma\upsilon\nu)'(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu x$ $\boxed{(\sigma\upsilon\nu)'(x)=-\eta\mu x}$

$h(x)=\varepsilon\varphi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{(\varepsilon\varphi)'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$

$(\varepsilon\varphi)'(x)=\dfrac{(\eta\mu)'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\,(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \dfrac{(\sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu x)-(\eta\mu x)(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ΜΑΘΗΜΑ 37 (11/1/13)

(συνέχεια Ασκήσεις)

4) $a>0, a\neq 1$, $f_a(x)=a^x$, $x\in\mathbb{R}$, (Ιδιαιτέρως $f(x)=e^x$)

$\underline{a=e}$, $x_0\in\mathbb{R}$, $\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h}=e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=$

$=e^{x_0}$

Άρα $(e^x)'=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

$a^x=e^{x\log a}\Rightarrow (a^x)'=(e^{x\log a})'=e^{x\log a}\cdot(x\log a)'=$
$=(\log a)a^x$

Παραγώγιση των αντίστροφων των βασικών συναρτήσεων

x^β $\log y$, $\log_a y$, Τοξημy, Τοξσυνy, Τοξεφy (διαπεδία ορισμού)

Θεώρημα αντιστρόφου
$f:(\alpha,\beta)\to(\gamma,\delta)$, f: "1-1", συνεχής, $\exists f'(x_0)$.
i) $f'(x_0)\neq 0$ Τότε $\exists (f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$.

ii) $f'(x)=0$. Τότε η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $f(x_0)$

1) $g(x)=\log y$, $y\in(0,+\infty)$ $\boxed{(\log)'(y)=\frac{1}{y},\ y\in(0,+\infty).}$

Η $g(x)=\log y$, $y>0$ είναι η αντίστροφη της e^x, $x\in\mathbb{R}$.
- Ισχύει επίσης $f'(x)=e^x\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Παίρνω $x_0\in\mathbb{R}$ Τότε $(f^{-1})'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{e^{x_0}}$.

Θέτω $y_0=e^{x_0}$. Τότε έχω $(\log)'(y)=\frac{1}{y}$, $y>0$

Με τυχαία βάση:

$a>0, a\neq 1, \log_a y = \dfrac{\log y}{\log a} = (\log_a)'(y) = \dfrac{1}{y\log a}$

1) ~~α~~ β) x^{β} : β = σταθερό, $x>0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

$x^{\beta} = e^{\beta \log x}$

$(x^{\beta})' = x^{\beta} \cdot (\beta \log x)'$

$= x^{\beta} \cdot \dfrac{\beta}{x} = \beta x^{\beta - 1}$

$\boxed{(x^{\beta})' = \beta x^{\beta-1} \quad x>0}$

Άρα $(x^{\beta})' = \beta x^{\beta-1}$, $x>0$

2) Η $g(y) = \text{τοξημ}(y)$, $y \in [-1,+1]$ είναι η αντίστροφη της $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x \neq 0$ ε1 $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

Άρα από Θ. Αντίστροφης Συνάρτησης $\exists$ $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

Αντικατάσταση: $(f^{-1})'(\eta\mu x_0) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x_0}$

Θέτω $y = \eta\mu x_0$ ~~και~~ τότε $\sigma\upsilon\nu x_0 = +\sqrt{1-\eta\mu^2 x_0} = \sqrt{1-y^2}$

(κανονικά είναι $\pm$ αλλά πήρα του ορισμό στο $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ όπου $\sigma\upsilon\nu x > 0$)

Οπότε έχω: $\boxed{(\text{τοξημ})'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in (-1,+1)}$

β) Για $g(y) = \text{τοξσυν}(y)$, $y \in (-1,+1)$
αποδεικνύεται ότι $(\text{τοξσυν})'(y) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1,+1)$

(*) (*)

γ) Η $g(y) = \text{τοξεφ}(y)$, $y \in (-\infty, +\infty)$ είναι η αντίστροφη της $f(x) = \text{εφ}x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\text{συν}x} \neq 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα (από Θ. αντιστροφής) $\exists\, (f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Άρα $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f^{-1})'(\text{εφ}x_0) = \dfrac{1}{\frac{1}{\text{συν}^2 x_0}} =$

$= \text{συν}^2 x_0$

Θέτω $y = \text{εφ}x_0$. Τότε $\text{συν}^2 x_0 = \dfrac{\text{συν}^2 x_0}{\text{ημ}^2 x_0 + \text{συν}^2 x_0} =$

$\overset{\div\,\text{συν}^2 x_0}{=} \dfrac{1}{\text{εφ}^2 x_0 + 1} = \dfrac{1}{y^2+1}$

Άρα $\boxed{(\text{τοξεφ})'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}}$

(*) Παρατήρηση

1) • Εάν $B \in \mathbb{R}$ η $f(x) = x^B$ ορίζεται για $x > 0$.
$x^B =: e^{B\log x}$

• Για $B = n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ η $g(x) = x^n$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και (με επαγωγή) $(x^n)' = n x^{n-1}$

2) Αν $B = \frac{1}{2n+1}$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

Τότε η $x^{\frac{1}{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{x}$

ή: $g(x) = x^{2n+1}$ είναι γνησίως αύξουσα

τότε ορίζεται η g^{-1}.

$$\sqrt[2n+1]{x} = \begin{cases} \sqrt[2n+1]{x}, & x > 0 \\ -\sqrt[2n+1]{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Βασικά Θεωρήματα Παραγωγίσιμων Συναρτήσ.

Τοπικά/ολικά ακρότατα $f: A \to \mathbb{R}$

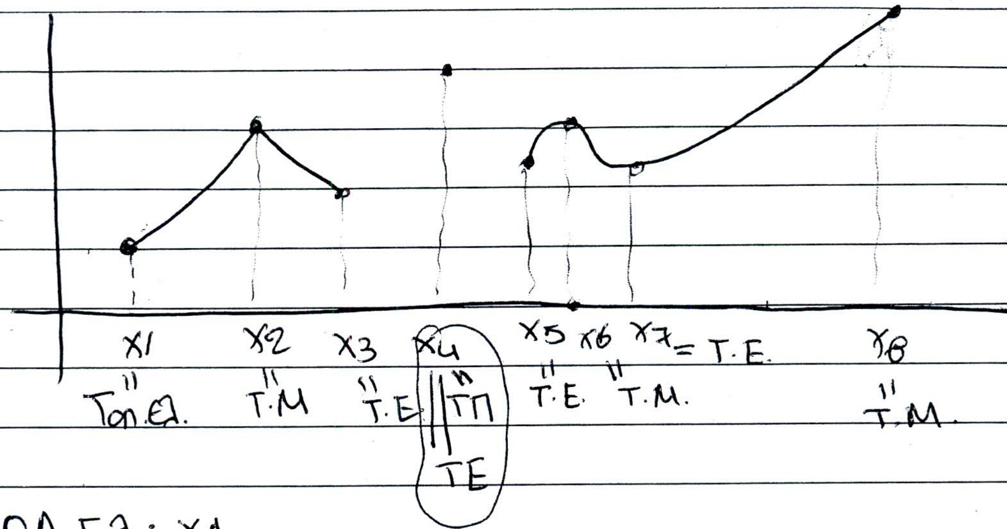
Ορισμοί: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in A$.

i) x_0 καλείται σημείο τοπικού ελαχίστου (/μεγίστου) της f $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$.

Αν x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου (ή ελαχίστου) καλείται σημείο τοπικού ακροτάτου.

ii) x_0 καλείται σημείο ολικού ελαχίστου (/μεγίστου) της f $\Longleftrightarrow$ $f(x) \geq f(x_0)$, ($f(x) \leq f(x_0)$), $\forall x \in A$!

Αν x_0 είναι σημείο ολικού μεγίστου (/ελαχίστου) καλείται σημείο ολικού ακροτάτου.



Ολ.Ελ: x1

Ολ.Μεγ: x8

ΑΡΧΗ ΤΟΥ FERMAT. (αποδ. από ορισμό παραγώγου, τοπ. ακρ)

$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, $\boxed{x_0\in(\alpha,\beta)}$!!! είναι τοπ. Ακρότατο της f τότε $f'(x_0)=0$

($\exists$ η $f'(x_0)$)

(*) Ο Fermat δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη τοπικού ακροτάτου!!! στο (α,β)!!!

Θ. Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής (από Π14)

$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\exists$ $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_1)=$ Ολ. Ελ. , $f(x_2)=$ Ολ. Μεγ.

Από Fermat και Θ.Μ.Ε.Τ $\Longrightarrow$ Θ. Rolle

$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f(\alpha)=f(\beta)$,

$\exists$ $f'(x)$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$

$\Downarrow$ τότε

$\exists$ $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

Από Θ. Rolle έπεται Θ. Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού

και το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του ~~Cossy~~ Cauchy
και από το Γενικευμένο έπονται οι κανόνες de l'Hospital, υπολ. Taylor...

Από Το Θ Μέσης Τιμής δεν έπεται του Rolle!

Rolle
$\downarrow$
ΘΜΤΔΛ

Αρχή Fermat

Έστω $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και η f παραγωγίσιμη στο x_0, x_0 τοπικό ακρότατο.
Τότε $f'(x_0)=0$

Απόδειξη: Έστω x_0 = τοπικό ελάχιστο. Τότε $\exists\, \delta>0$: $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (\alpha,\beta)$ ώστε αν $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ τότε $f(x) \geq f(x_0)$.

$x_0 \in (\alpha,\beta)$ άρα x_0 = Α Σ.Σ και Δ.ΣΣ άρα έχει έννοια η $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$.

Παίρνουμε $x \in (x_0, x_0+\delta)$ τότε $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

Παίρνουμε $x \in (x_0-\delta, x_0)$. Τότε $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

Επομένως $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$.

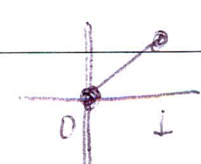
Παρατήρηση: Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [\alpha,\beta]$, x_0 = Τ.Α. και $\exists\, f'(x_0)$.

Αν $x_0=\alpha$, x_0 = Τ.Ε τότε $f'(\alpha) \geq 0$
Αν $x_0=\alpha$, x_0 = Τ.Μ τότε $f'(\alpha) \leq 0$

Αν $x_0=\beta$, x_0 = Τ.Ε τότε $f'(\beta) \leq 0$
Αν $x_0=\beta$, x_0 = Τ.Μ τότε $f'(\beta) \geq 0$

Προσοχή
Μπορεί: $f'(\alpha) \neq 0$
$f'(\beta) \neq 0$

199



$f'(0)=1>0$, 0 = ολικό Ελαχ.
$f'(1)=1>0$, 1 = ολικό Μεγ.

Θ. Rolle

$f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$

Προϋποθέσεις
i) f συν στο $[\alpha,\beta]$ (για να έχει ολικά Ακροτ. από Π.Μ.Ι.)
ii) $f(\alpha)=f(\beta)$ (για να έχει ολικά ακρότατα στο (α,β)).
iii) $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ παραγ. (Για να εφαρμοστεί η Αρχή του Fermat)

Τότε $\exists\ \xi \in (\alpha,\beta) : f'(\xi)=0$.

Απόδειξη: $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής $\xRightarrow[(\Pi\mu)]{\Theta\mu ET}$ $\exists\ x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$:
x_1 σημείο ολικού ελαχίστου,
x_2 σημείο ολικού μεγίστου.

Έστω ότι $x_1, x_2 \in \{\alpha,\beta\}$ Τότε.

1η περιπτ. $x_1=\alpha,\ x_2=\beta \Rightarrow f(\alpha)=f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)=f(\beta)$
$\forall\ x \in [\alpha,\beta]$

όμως (από υπόθεση) $f(\alpha)=f(\beta)$

Άρα $f(x)=c$, $x \in [\alpha,\beta]$

Τότε $f'(\xi)=0\ \forall\ \xi \in (\alpha,\beta)$

2η περίπτωση: $x_1=x_2=\alpha$

Τότε $f(x_1)=f(\alpha) \le f(x) \le f(x_2)=f(\alpha)$.

Άρα $f(x)=c=f(\alpha)$.

Άρα $f'(\xi)=0\ \forall\ \xi \in (\alpha,\beta)$.

3η περίπτωση:

Έστω ένα από τα x_1, x_2 δεν ανήκουν στο $\{\alpha,\beta\}$.

Έστω $x_1 \in (\alpha,\beta)$ Τότε $f'(x_1)=0$ (Αρχή Fermat).

200