14/1/13 (Μαθ. 38)

▶ **Θ. Rolle:**

$f: [a, \beta] \to \mathbb{R}$

i) η f συνεχής στο $[a,\beta]$ ($\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,\beta]: f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), x \in [a,\beta]$ ΘΜΕ)

ii) $f(a) = f(\beta)$ (τουλ. 1 από τα x_1, x_2 ανήκει στο (a,β), έστω $x_1 \in (a,\beta)$)

iii) f παρ/μη στο (a,β) (Αρχή Fermat, $f'(x_1)=0$)

Τότε $\exists\, \xi \in (a,\beta) : f'(\xi) = 0$.

▶ **Θ. Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού** (συνέπεια του Θ. Rolle)

Έστω $g[a,\beta] \to \mathbb{R}$ ώστε:

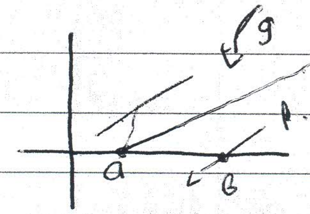
i) η g συνεχής στο $[a,\beta]$

ii) η g παρ/μη στο (a,β).

Τότε $\exists\, \xi \in (a,\beta): g'(\xi) = \dfrac{g(\beta)-g(a)}{\beta - a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{g(\beta) - g(a) = g'(\xi)(\beta - a)}$

απόδειξη:



$f(x) = g(x) - g(a) - \dfrac{g(\beta)-g(a)}{\beta - a}(x - a),\ x \in [a,\beta]$.

i) η f συνεχής στο $[a,\beta]$: g συνεχής στο $[a,\beta]$, $h(x)=x$ συνεχής

ii) $f(a) = 0 = f(\beta)$

iii) η f παρ/μη στο (a,β): g παρ/μη στο (a,β), $h(x)=x$ παρ/μη.

Άρα (Θ. Rolle) υπάρχει $\xi \in (a,\beta): f'(\xi) = 0$ δηλαδή

$0 = f'(\xi) = g'(\xi) - \dfrac{g(\beta)-g(a)}{\beta - a}$ //

▶ **Γενικευμένο Θ. Μέσης Τιμής Cauchy** (συνέπεια του Θ. Rolle)

Έστω $f, g\ [a,\beta] \to \mathbb{R}$ ώστε

i) f, g συνεχείς στο $[a,\beta]$

ii) f, g παρ/μη στο (a, b).
Τότε $\exists\ \xi \in (a, b) : f'(\xi)(g(b)-g(a)) = g'(\xi)(f(b)-f(a))$.

Επιπλέον:
Εάν $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
Τότε $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

απόδειξη:

$F(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$.
i) F συνεχής στο $[a, b]$: f, g = συνεχής στο $[a, b]$
ii) $F(a) = F(b)$
iii) F υπάρχει στο (a, b) : f, g παρ/μη στο (a, b).
Άρα (*) $\exists\ \xi \in (a, b) : F'(\xi) = 0$.
$0 = F'(\xi) = f'(\xi)(g(b)-g(a)) - g'(\xi)(f(b)-f(a))$.
Έστω $g'(x) \neq 0,\ x \in (a, b)$.
$\exists\ \xi_1 \in (a, b) : g(b)-g(a) = g'(\xi_1)(b-a) \neq 0$
(ΘΜΤ)
Άρα από την (*) $\exists\ \xi \in (a, b)$
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Θεώρημα Κανόνας L'Hospital.

Για τον υπολογισμό ορίων, απροσδιόριστης μορφής $0/0$, ∞/∞

1) Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$
   i) $f, g : [x_0-\delta, x_0+\delta] \xrightarrow{\subseteq (a,b)} \mathbb{R}$ συνεχείς και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (∞)
   ii) f, g παρ/μη στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$
   iii) $g'(x) \neq 0,\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
   iv) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

   Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$. / Ανάλογα $\lim\limits_{x \to x_0^+}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-}$

2) $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχείς και παρ/μες και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = c$ $(\infty$
και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Τότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. (Αποδ. φροντ.)

3) $f, g : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ Ανάλογα..

- Μια ιδέα από την απόδειξη του 1) για $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0^-} g(x)$:

Αποδ 1)
f, g συν στο $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $f(x_0) = 0 = g(x_0)$.
$g'(x) \neq 0$, $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ΓΘΜΤ C.
$x \in (x_0, x_0+\delta)$ τότε $\exists\, x_0 < \xi_x < x$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$.

Όμως επειδή $0 < \xi_x < x$, Αν $x \to x_0$ τότε $\xi_x \to x_0$.
$\ell = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ // Όμοια για το $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

Απροσδιόριστες Μορφές

- Αν ισχύει το 1) ή το 2) ή το 3) μπορούμε να υπολογίσουμε όρια της μορφής: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ για $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty$
- Εάν έχουμε απροσδιοριστία μορφής $0 \cdot \infty$ / Ανάγεται στο $0/0$ ή $\frac{\infty}{\infty}$.
- Εάν έχουμε απροσδιοριστία μορφής $(0^+)^0$, ανάγεται στο $e^{0 \cdot \log(0^+)}$. Βρίσκουμε το $0 \cdot (-\infty) = \ell$, $(0^+)^0 = e^{\ell}$. ($a>0$, $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b \log a}$) Βρίσκουμε το $0 \cdot (-\infty) = \ell$, $(0^+)^0 = e^{\ell}$.
- Εάν έχουμε απροσδιοριστία μορφής 1^∞, ανάγεται στο $e^{\infty \cdot \log 1}$. Βρίσκουμε $\infty \cdot 0 = \ell'$, $1^\infty = e^{\ell'}$

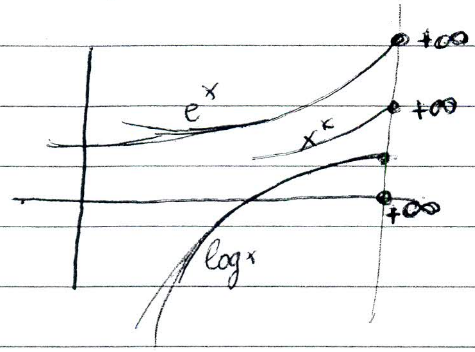
Ασκήσεις (***)

1) Έστω $k \in \mathbb{N}$ (σταθερά)
i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^k} = 0$, Άρα $\exists\, M > 0$: $x^k > \log x$ για $x \geq M$.

Γενικότερα $a > 0$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$

ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$

Άρα $\exists\ M' = M'(\varepsilon) > 0 : e^x > x^k$ για $x \geq M'$



Λύση

i) $k = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty = \lim_{x \to +\infty} x$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$f(x) = \log x, g(x) = x$ παρ/μες $(0, +\infty)$

$g'(x) = 1 \neq 0.$

$\frac{+\infty}{+\infty}$ / $l = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Άρα $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$

$k \geq 1,\ x^k \geq x$ για $x \geq 1.$

Άρα $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^k} = 0$

$\exists\ M > 0,\ \log x < x^k$ για $x \geq M$ // $\varepsilon = 1.$

ii) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty = \lim_{x \to +\infty} x^k$ $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = \lim \frac{e^x}{k x^{k-1}} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

* 2) * i) $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right) = e^a}$ (1^∞)

ii) $a > 0,\ \lim_{x \to +\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \log a$ $(\infty \cdot 0)$

Λύση

$f(x) = 1 + \frac{a}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \Big/ 1^{\infty}$

$g(x) = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)}$

$\underset{(+\infty)}{x}\underset{0}{\log}\left(1+\frac{a}{x}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{a}{\cancel{x}}\right)}{\frac{1}{x}} \Big/ \frac{0}{0}.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\left(\frac{a}{-x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{1+\frac{a}{x}} = a$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{a}{x}\right)} = e^a$$

ii) $(+\infty)\cdot 0.$

$$l = \lim_{x\to+\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log a)\, a^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \log a.$$

3) $a_n = \frac{\log n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{AM} 0$ $\quad \left(f(x) = \frac{\log x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,\ x_n = n \to +\infty \overset{AM}{\Rightarrow} f(x_n) \to 0\right)$

$b_n = \frac{e^{\sqrt[n]{n}}}{n^{100}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\gamma_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \longrightarrow e^2$ $\quad \left(f(x) = \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{\alpha},\ x_n = n \to +\infty \overset{AM}{\Rightarrow} f(x_n) \to e^{\alpha}\right)$ $\alpha = 2$

$\delta_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \longrightarrow \sqrt{e}.$ $\quad \to \alpha = \frac{1}{2}$

$\zeta_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{5}-1\right) \longrightarrow \log 5$ $\quad \left(f(x) = x\left(5^{1/x}-1\right),\ x_n = 2^n \to +\infty \overset{AM}{\Rightarrow} f(x_n) \to \log 5\right)$

Ασκήσεις (κ. L'Hospital)

(1 L'Hospital και 1 λύση).

1) $\boxed{0/0}$ i) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{τοξεφ}\,x}{\text{τοξημ}\,x - x} = 2$

ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - n\,\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{n}\right)}{n\,\text{τοξημ}\left(\frac{1}{n}\right) - 1} = 2$ (AM)

2) $\boxed{0/0}$ $a, b \neq 0$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\text{συν}(ax))}{\log(\text{συν}(bx))} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\text{συν}(2\sqrt[n]{n}-2))}{\log(\text{συν}(\sqrt[n]{n}-1))} = 4$

$x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow[n]{} 0.$

15/1/13

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι (ΜαΘ 39)

Ασκήσεις (... συνέχεια).

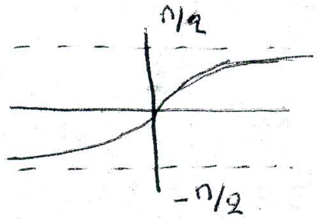
$\boxed{\infty \cdot 0}$

3) i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x\right)$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}(3^n)\right)$

Λύση

i) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{τοξεφ}\, x = \frac{\pi}{2}$



$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x\right) = 0.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)\cdot 0$

$f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x$, $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$x>0, g(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0, x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

Άρα από Θ. L'Hospital $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x\right) = 1.$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x\right) \overset{(i)}{=} 1.$

Από την Αρχή της Μεταφοράς εάν $x_n \xrightarrow[n]{} +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}\, x_n\right).$

Επειδή η $x_n = 3^n \xrightarrow[n]{} +\infty$

θα έχουμε

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\frac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}(3^n)\right) = 1.$

4) $a>0$ $\lim\limits_{x\to0^+} x^a \log(x)$ $(0\cdot\infty)$

$f(x) = \log(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} \log x = -\infty$

$g(x) = \frac{1}{x^a}$, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^a} = +\infty$

$g'(x) = -a x^{-a-1} = \frac{-a}{x^{a+1}} \neq 0 \quad x>0$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{a}{x^{a+1}}} = -\frac{1}{a}\lim\limits_{x\to0^+} x^a = 0$

Άρα, $\exists \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 / \lim\limits_{x\to0^+} x^a \log x = 0$

$\boxed{0^0}$

5) i) $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Λύση.

i) $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ $\quad (0^+)^0$

$x^x = e^{x\log x}$, $x>0$.

$\lim_{x\to 0^+} x\log x \overset{(4)}{=} 0$

Επειδή $e^{(\cdot\cdot)}$ είναι συνεχής συνάρτηση θα έχουμε:

$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\log x} = e^0 = 1.$

ii) $x_n = \frac{1}{n} > 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \overset{(i)}{=} 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

6) i) $\lim_{x\to 0^+} (\eta\mu x)^x = 1.$

ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\eta\mu\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \eta\mu x = 0 = \lim_{x\to 0^+} x$ $/ 0^0$

$(\eta\mu x)^x = e^{x\log(\eta\mu x)}$

$h(x) = \frac{\log(\eta\mu x)}{\frac{1}{x}}$ $\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \cancel{\cdots}\, x\,\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{x}{\eta\mu x} = 0.$

$\lim_{x\to 0^+} (\eta\mu x)^x = e^0 = 1$

7) $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ $\quad$ (2η λύση παραγώγιση)

$\lim_{x\to 0^+} (\tau o\xi\epsilon\varphi x)^{\frac{a}{\log x}} = e^a$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \tau o\xi\epsilon\varphi x = 0$ $/ 0^0$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\text{συν}\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\text{συν}\frac{1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 = +\infty$ / 1^∞

$\left(\text{συν}\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2\log\left(\text{συν}\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{(*)} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$(*)\quad \dfrac{\left(\log\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)'} = \dfrac{\frac{1}{\text{συν}\frac{1}{x}}\cdot\left(-\text{ημ}\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2\,\frac{1}{x^3}} = \dfrac{-\text{ημ}\frac{1}{x}}{2\,\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{x}\to 0\right)$

9) $\nu = \text{σταθ}, \nu\in\mathbb{N}, \nu\geq 2$

i) $\lim\left[1+\log(1+x)+\log(1+2x)+\dots+\log(1+\nu x)\right]^{1/x} = e^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^n = e^3$

Λύση

i) $\log(1+kx)\xrightarrow[x\to 0]{}\log 1 = 0$ $\quad k=1,2,\dots,\nu.$ / 1^∞

$\frac{1}{x}\log\left(1+\log(1+x)+\dots+\log(\nu x)\right).$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+\log(1+x)+\dots+\log\nu x}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+2x}+\dots+\frac{\nu}{1+\nu x}\right]}{(x)'(=1)} = 1+2+\dots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\log(1+x)+\log(1+2x)+\dots+\log(1+\nu x)\right] = e^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}$

Σ-Λ
$a_n \xrightarrow{n} 1 \overset{?}{\Rightarrow} a_n^n \xrightarrow{n} 1$ / ΌΧΙ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$
Παράδειγμα

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^n = e^3$

$x_n = \frac{1}{n}\to 0.$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\text{ημ}x}{x}\right)^{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$ (HW)

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\log x}\right)^x = +\infty$

$\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^n \xrightarrow[n]{} +\infty$

Εφαρμογή της παραγώγου στην μελέτη συναρτήσεων, ...

Πρόταση - Άσκηση

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ και η f παρ/μη στο x_0 με $f'(x_0)>0$

Τότε $\exists\ \delta>0$: αν $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq(a,b)$

ισχύει: $\begin{cases} x\in(x_0, x_0+\delta) \text{ τότε } f(x)>f(x_0) \\ x\in(x_0-\delta, x_0) \text{ τότε } f(x)<f(x_0) \end{cases}$

απόδειξη

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)>0$$

Άρα $\exists\ \delta>0$: αν $x\neq x_0$, $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ τότε $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\varepsilon=\dfrac{f'(x_0)}{2}>0$.

Αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$ τότε $f(x)>f(x_0)$

$x\in(x_0-\delta, x_0)$ τότε $f(x)<f(x_0)$

Πρόταση - Κρ Μονοτονία Παραγ. συναρτήσεων $f:(a,b)\to\mathbb{R}$

α) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παρ/μη στο (a,b)

i) $f'(x)\geq 0$ $x\in(a,b)$ $\iff$ η f αύξουσα

ii) $f'(x)>0$ $x\in(a,b)$ $\Longrightarrow$ η f γνήσια αύξουσα.

Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει.

β) $f'(x)\leq 0$ $x\in(a,b)$ $\iff$ f φθίνουσα

$f'(x)<0$ $x\in(a,b)$ $\Longrightarrow$ f γνησίως φθίνουσα

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

(f φθίνουσα $\Leftrightarrow -f$ αύξουσα
(γν. φθ) $\Leftrightarrow -f$ γν. αύξουσα)

απόδειξη

α) i) ($\Longrightarrow$) Έστω $f'(x)\geq 0$ $x\in(a,b)$

Έστω $x_2>x_1$, $x_1,x_2\in(a,b)$

$f(x_2)-f(x_1)\overset{\text{ΘΜΤ}}{=}f'(\xi)(x_2-x_1)\geq 0$ (για κάποιο $\xi\in(x_1,x_2)$)

Άρα η f είναι αύξουσα.

($\Longleftarrow$) Έστω f αύξουσα $x_0\in(a,b)$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

ii) Έστω $f'(x)>0$ $x\in(a,b)$

Έστω $x_2>x_1$, $x_1,x_2\in(a,b)$.

$f(x_2)-f(x_1)\overset{\text{ΘΜΤ}}{=}f'(\xi)(x_2-x_1)>0$ (για κάποιο $\xi\in(x_1,x_2)$)

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

<u>πχ</u> $f(x)=x^3/x^5, x^7, \ldots$ γν. αύξουσες και $f'(0)=0$.

Άσκηση (χρήσιμο) (χρησιμοποιούμε και ΘΜΤ).

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παρ/μη και υπάρχει $x_0\in(a,b)$: $f'(x_0)=0$ και $\left|\begin{array}{l} f'(x)\geq 0 \text{ για } x\in(x_0,b) \\ f'(x)\leq 0 \text{ για } x\in(a,x_0)\end{array}\right.$

Τότε το x_0 είναι ολικό ελάχιστο. (σημείο ολ. ελαχ)

Λύση

Έστω $x\in(x_0,b)$

Τότε $f(x)-f(x_0)=f'(\xi_x)(x-x_0)\geq 0$ ($\xi_x\in(x_0,x)$)

Άρα $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in(x_0,b)$

Έστω $x\in(a,x_0)$

Τότε $f(x)-f(x_0)=f'(\xi_x')(x-x_0)\geq 0$.

Άρα $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in(a,x_0)$

Άρα $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in(a,b)$.

Οπότε το x_0 είναι σημείο Ολικού Ελαχίστου της f στο (a,b).

Παράγωγοι Ανωτέρας Τάξης

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$: $\exists\ \delta>0$: η $f|_{(x_0-\delta,x_0+\delta)}\ (\subseteq(a,b))$ είναι παρ/μη.

Εάν $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=(f')'(x_0)$

Συμβ: $f''(x_0)$ ή $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x_0)$ ή $\ddot{f}(x_0)$

Πρόταση Κριτήριο Δευτέρας Παραγώγου Για τοπ. ακρότατα.

Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παρ/μη, $x_0\in(a,b)$: $f'(x_0)=0$ και υπάρχει $f''(x_0)$.

i) Εάν $f''(x_0)>0$ τότε το x_0 = Τοπ. Ελάχιστο

ii) Εάν $f''(x_0)<0$ τότε το x_0 = Τοπ Μέγιστο

iii) Εάν $f''(x_0)=0$ δεν έχουμε συμπέρασμα.

Απόδειξη.

i) $f''(x_0)>0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\overset{=0}{f'(x_0)}}{x-x_0}=f''(x_0)>0$$

Άρα $\exists\ \delta>0$: $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$ $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\ (\subseteq(a,b))$

$x\in(x_0,x_0+\delta)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)>f(x_0)$

$x\in(x_0-\delta,x_0)$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)$.

Άρα αν $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$

Τότε $f(x)>f(x_0)$

Άρα x_0 σημείο τοπικού ελαχίστου (και γνήσιο)

16/01/2013 (Μαθ 40) (Τεχνικό ⑪)

Ασκήσεις

1) i) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παρ/μη με $f'(x)=0$ $\forall\, x\in(a,b)$
ΝΔΟ η f είναι σταθερή συνάρτηση ($f(x)=c$ $x\in(a,b)$).
ii) $g,h:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγ με $g'(x)=h'(x)$ ~~$+c$, $x\in(a,b)$) ($f=g$~~
$\forall\, x\in(a,b)$. ΝΔΟ η $g-h$ είναι σταθ συνάρτηση ($g(x)=h(x)+c'$, $x\in(a,b)$)
($f=g-h$ στο i) $\Rightarrow$ ii)).

Λύση

i) Έστω $x_0\in(a,b)$ σταθερό
$x\neq x_0$ ΘΜΤ $\exists\, \xi_x\in(a,b)$, $f(x)-f(x_0)=f'(\xi_x)(x-x_0)=0$
Άρα $f(x)=f(x_0)$ $\forall\, x\in(a,b)$.

2) i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(y)-f(x)\leq(y-x)^2$ $x,y\in\mathbb{R}$
ΝΔΟ η f είναι σταθερή
ii) f $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p>1$ με $f(y)-f(x)\leq|y-x|^p$ $x,y\in\mathbb{R}$
ΝΔΟ η f είναι σταθερή. Τι συμβαίνει για $p=1$;

Λύση

i) $f(x)-f(y)\leq(x-y)^2$
$f(y)-f(x)\leq(y-x)^2$
$|f(y)-f(x)|\leq|y-x|^2$
$x=$ σταθ, $y\neq x$, $\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leq|y-x|$

$\lim\limits_{y\to x}|y-x|=0$
Άρα $\lim\limits_{y\to x}\left|\dfrac{f(x)-f(x)}{y-x}\right|=0$.

Άρα $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$ δηλ $f'(x)=0$

Άρα $f'(x)=0$, $x\in(a,b)$ $\overset{\text{Ασκ 1}}{\Longrightarrow}$ $f=$ σταθ.

ii) Ανάλογα $|y-x|^{p-1}\xrightarrow[y\to x]{}0$.

3) i) $f(x)=\begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Να ευρεθεί (αν υπάρχει) η $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
Να δειχθεί ότι η f' είναι ασυνεχής στο $x_0=0$

ii) $g(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+x^2 ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

ΝΔΟ $g'(0)>0$ και δεν υπάρχει $δ>0 : g:(-δ,+δ)\to\mathbb{R}$ να είναι μονότονη.

Λύση

i) $x_0\neq 0$, $f'(x_0)=2x_0 ημ\frac{1}{x_0} - συν\frac{1}{x_0}$

$x_0=0$, $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h ημ\frac{1}{h}=0$

Επομένως $f'(x)=\begin{cases} 2xημ\frac{1}{x}-συν\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$x_n=\frac{1}{2\pi n}\to 0$

$f'(x_n)=\frac{2}{2\pi n}ημ(2\pi n)-1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Άρα η f' ασυνεχής στο $x_0=0$

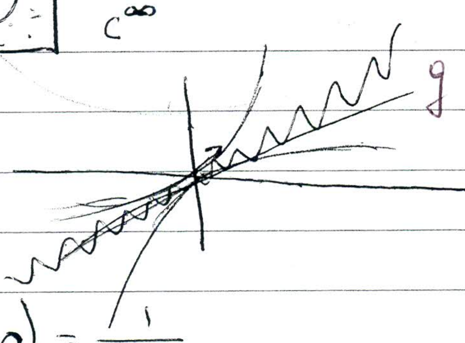
$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = -1 \neq 0 = f'(0)$

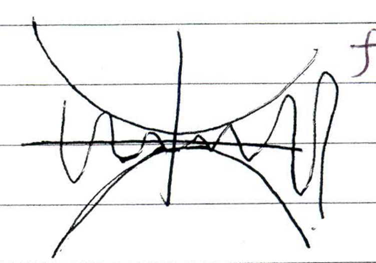
συνεχείς σου

παραγ. $c^1 / \exists f'$ = συνεχής . . . .

c^∞

ii)





$g'(0)=\frac{1}{2}$

$\left(g(x)=\frac{x}{2}+f(x)\right)$

Έστω $δ>0$

$g:(-δ,+δ)\to\mathbb{R}$ μονότονη.

$g'(x)=\frac{1}{2}+2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$

$x_n\to 0,\ x_n\neq 0,\ x_n\in(-\delta,+\delta),\ n\geq n_0$

$x_n=\frac{1}{2\pi n},\ g'(x_n)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}<0$

$y_n=\frac{1}{2\pi n+\pi},\ g'(y_n)=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}>0$

Εαν η g ↑ στο $(-\delta,+\delta)$ τότε $g'(x)\geq 0,\ x\in(0,\delta)$ Αδύνατον

↓ στο $(-\delta,+\delta)$ $g'(x)\leq 0,\ x\in(0,\delta)$ Αδύνατον

(*Θέμα*)

*4) $a,b,\gamma\in\mathbb{R}$ (σταθερά). ΝΔΟ η εξίσωση $4ax^3+3bx^2+2\gamma x=a+b+\gamma$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

$f(x)=ax^4+bx^3+\gamma x^2-ax-bx-\gamma x$ παραγ. στο $\mathbb{R}$.

$f(1)=a+b+\gamma-a-b-\gamma=0$

$f(0)=0$.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συν, $f(0)=f(1)$, f παρ στο $(0,1)$ $\xrightarrow{R}\exists\ \xi\in(0,1):f'(\xi)=0$.

δηλ. $\exists\ \xi\in(0,1)$

$0=f'(\xi)=4a\xi^3+3b\xi^2+2\gamma\xi-a-b-\gamma=0$.

5) $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγ. με $|f'(x)|\leq\frac{1}{x},\ x>1$.

ΝΔΟ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x})-f(x)]=0$

Λύση

$x=$ σταθ. $x>1$, $\exists\ \xi_x: x<\xi_x<x+\sqrt{x}$.

$f(x+\sqrt{x})-f(x)\overset{ΘΜΤ}{=}f'(\xi_x)\sqrt{x}$

$|f'(\xi_x)|\leq\frac{1}{\xi_x}<\frac{1}{x}$

$|f(x+\sqrt{x})-f(x)|\leq\frac{1}{x}\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

▶ Ασκήσεις (Ανισότητες)

1) ΝΔΟ

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{i) } e^x>1+x,\ x\in\mathbb{R}-\{0\}.\\ \text{ii) } 1-\frac{1}{y}<\log y<y-1,\ y\in(0,+\infty)-\{1\}\end{array}}$$

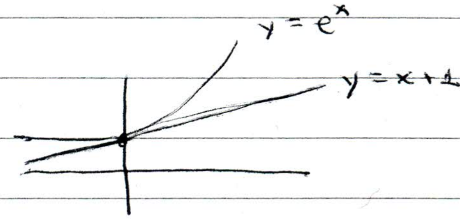
Λύση

i) $f(x) = e^x - x - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x - 1 \qquad /1 = e^0$

και $f'(x) > 0 \iff x > 0$

$f'(x) < 0 \iff x < 0$



Άρα $f(x) > f(0),\ x \neq 0.$

$e^x - x - 1 > e^0 - 0 - 1 = 0.$

ii) $e^x > x + 1,\ x \neq 0.$

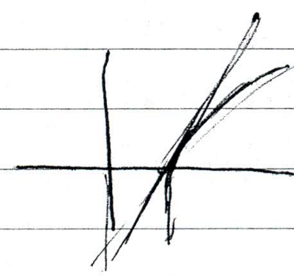
$y \in (0, +\infty) - \{1\}$

$x = y - 1 \neq 0 \overset{i)}{\implies} e^{y-1} > y \qquad y \neq 1$

$y - 1 > \log y,\ y \in (0, +\infty) - \{1\}.$ (*) $\qquad (\log 1)$

$y \in (0, +\infty) - \{1\}$

$y \neq 1,\ \frac{1}{y} \neq 1.$



(*) $\implies \frac{1}{y} - 1 > \log \frac{1}{y} = -\log y.$

Άρα $\log y > 1 - \frac{1}{y}$

$y \in (0, +\infty) - \{1\},\ 1 - \frac{1}{y} < \log y < y - 1.$

2) $\boxed{\text{i) } \frac{\log x}{x} < \frac{1}{e} \quad x \in (0, +\infty) - \{e\}}$

ii) Να συγκριθούν οι $\pi^e,\ e^\pi$

Λύση

i) $f(x) = \frac{\log x}{x},\ x \in (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} = \frac{\log e - \log x}{x^2}$

$f'(x) > 0 \iff x < e.$

$f'(x) < 0 \iff x > e$ (+)

Άρα $f(x) < f(e) \quad x \in (0, +\infty) - \{e\}$

$\frac{\log x}{x} < \frac{1}{e}.$

ii) $e < \pi.$

(+) $f(e) > f(\pi)$

$\frac{1}{e} > \frac{\log}{\pi} \implies \pi > e \log \pi = \log \pi^e \implies e^\pi > \pi^e.$

$e^{(\cdot)} \uparrow$

3) i) Έστω $a_1, a_2, \dots, a_\nu \in \mathbb{R}$ $(\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2, \nu = \text{σταθ})$.

$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_\nu)$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

ΝΔΟ $f\left(\frac{a_1+\dots+a_\nu}{\nu}\right) < f(x)$, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{a_1+\dots+a_\nu}{\nu}\right\}$

ii) $g(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-101)^2$

$g(x) > g(51)$, $x \in \mathbb{R} - \{51\}$.

Λύση.

i) $f'(x) = 2[(x-a_1) + (x-a_2) + \dots + (x-a_\nu)]$

$= 2[\nu x - (a_1 + \dots + a_\nu)]$

$f'(x) > 0 \iff x > \frac{a_1+\dots+a_\nu}{\nu}$

$f'(x) < 0 \iff x < \frac{a_1+\dots+a_\nu}{\nu}$.

$x_0 = \frac{a_1+\dots+a_\nu}{\nu}$ ολ. ελάχιστο.

ii) $g'(x_0) = 0 \iff x_0 = \frac{1+2+\dots+\nu}{\nu} = \frac{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}{\nu} = \frac{\nu+1}{2} \overset{\nu=101}{=} \frac{102}{2} = 51$.

Άρα x_0 = ολ(γν) ελάχιστο.

Ασκήσεις Σ/Λ

1) $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ και $\exists f'(x_0)$ τότε η f είναι συν στο x_0.

Σωστό / Με απόδειξη (...)

2) $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ συν στο $(a,b) \Rightarrow \exists f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Λάθος: πχ $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

3) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ παρ/μη $\forall x \in [a,b]$

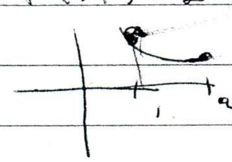
Έστω $x_1, x_2 \in [a,b]$ τα σημεία ακροτάτων της f.

Τότε $f'(x_1) = 0$ ή $f'(x_2) = 0$.

Λάθος: πχ: • $f(x) = x$, $x \in [0,1]$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ και $f'(x_1) = 1 = f'(x_2)$.

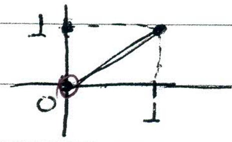
• $g(x) = \frac{1}{x}$ $x \in [1,2]$



4) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(a) = f(b)$ και παρ στο (a,b)

Τότε $\exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

Λάθος : πχ $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,1] \\ 1, & x=0 \end{cases}$ $f(0)=f(1)=1$



$f'(x)=1, x\in(0,1)$

5) $f: I \to \mathbb{R}$, I = διαστήματα και $f'(x)=0 \ \forall x\in I$. Τότε η f είναι σταθερή.

Σωστό / Αοκ 1 προαπαιτούμενα

6) $f: A\to\mathbb{R}$, $f'(x)=0 \ \forall x\in A$. Τότε η f = σταθ.

Λάθος πχ: $f(x)=\begin{cases} -1 & x\in[0,1] \\ 1, & x\in[2,3]. \end{cases}$

7) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παρ/μη τότε η f' είναι συνεχής.

Λάθος : πχ $f(x)=\begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0. \end{cases}$

8) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$ ώστε να $\exists f'(x_0)>0$.

Τότε $\exists \delta>0$ f μονότονη στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

Λάθος $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+x^2ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$

9) Θεωρ f,g $[a,b]\to\mathbb{R}$ συν στο $[a,b]$ παρ στο (a,b)

Έστω $\xi_1\in(a,b)$ $f(b)-f(a)=f'(\xi_1)(b-a)$ και

$\xi_2\in(a,b)$: $g(b)-g(a)=g'(\xi_2)(b-a)$.

Τότε $\xi_1=\xi_2$

$f(x)=x^2$ | $g(x)=x^3$, $x\in[0,1]$

$\xi_1=\frac{1}{2}$ | $\xi_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

16/1/2013 (9-11πμ)

Φροντιστηριακό Απειροστικού Λογισμό

Υπενθύμιση:

→ (De L'Hospital):

(Παλιά): $f,g : (a,x_0)\cup(x_0,b) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

f,g παραγωγίσιμες (I)

(+) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} (\neq \pm\infty)$

Άρα $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(Νέα): $\frac{0}{0}$ $x \to +\infty$

$f,g : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

f,g παραγωγίσιμες

(+) ~~(lim)~~ $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

απόδειξη:

$f_1(x) = f(\frac{1}{x}) : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbb{R}$.

$g_1(x) = g(\frac{1}{x})$.

f,g παρ/μες ως σύνθεση παρ/μων στο A.

$\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{(f(\frac{1}{x}))'}{(g(\frac{1}{x}))'} = \frac{f'(\frac{1}{x})\cdot(-\cancel{\frac{1}{x^2}})}{g'(\frac{1}{x})(-\cancel{\frac{1}{x^2}})} = \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})}$ / $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (II)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$.

Από (I) ικανοποιείται (παλιό)

$\Rightarrow \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \ell \overset{(II)}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

ιδέες: 1) $+\infty = \frac{1}{0}$

2) $x \leftrightarrow \frac{1}{u}$

3) Ορίζω καινούργιες f,g.

(Αν θέλω υποθέτω $a>0$)

4) Από απόδειξη παλιού: $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ Τότε το συμπέρασμα πάει $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

▶ Ερώτηση:
$f: A \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και $A \subseteq \mathbb{R}$.
f παραγωγίσιμη στο A τότε είναι σωστό ότι η $h = f'$ είναι συνεχής στο A;
– Όχι:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

▶ Παράδειγμα: Δείξε ότι η f είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ όμως η f' όχι συνεχής
– απόδειξη:
Για $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση γινόμενο παραγωγίσεων κλπ.).
Για $x = 0$. Ορισμό.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 ημ\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x ημ\frac{1}{x}$$

(Μηδενική επί φραγμένη = μηδενική)

Σχόλιο: (με ορισμό):
$\left|x ημ\frac{1}{x} - 0\right| = |x| \left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq |x| < ε$.
$\boxed{\text{Άρα } δ = ε}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \cancel{x \neq 0} \quad x = 0 \end{cases}$$

(f' ? συνεχής;).
Πρόβλημα στο 0. Θα έπρεπε: $\underbrace{\lim_{x \to 0}\left(2x ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}\right)}_{(*)} = 0$

Το (*) δεν υπάρχει
Έστω ότι $\exists$: $\lim_{x \to 0}\left(2x ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}\right) = \ell$.
• $\lim_{x \to 0} 2x ημ\frac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim_{x \to 0}\left(2x ημ\frac{1}{x} - 2x ημ\frac{1}{x} + συν\frac{1}{x}\right) = 0 - \ell$
άρα $\lim_{x \to 0} συν\frac{1}{x} = -\ell$ Δηλαδή $\exists$. Άτοπο

Φ2

(κολπάκι).

Σχόλιο: Παρε $x_n \to 0$

$y_n \to 0$.

$x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow \text{συν}\frac{1}{x_n} = 1 \to 1$
$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{συν}\frac{1}{y_n} = 0 = 0$
$\neq$ } Άτοπο.

Άσκηση (Θ. Darboux) (όχι απόδειξη για τις εξετάσεις)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

$x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 \in (a,b)$ και $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$.

Να δειχθεί ότι $\exists\ \xi_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi_0) = 0$.

– απόδειξη:

f παραγ στο (a,b)
$\Downarrow$
f συνεχής στο (a,b)
$\Downarrow$ " – $[x_1, x_2] \subset (a,b)$
$\Downarrow$ Θεώρημα Μεγ. Ελαχ. Τιμής.

$\exists\ \xi_0, \xi_0'$ ώστε $f(\xi_0) \le f(x) \le f'(\xi_0')$
με $\xi_0, \xi_0' \in [x_1, x_2]$.

Άρα $\exists\ \xi_0 \in [x, x_2]$ ώστε
$f(\xi_0) \le f(x)$

Προσοχή!	Δίνεται f παραγωγίσιμη αλλά f' όχι συνεχής. κατ' ανάγκη. 'ΟΧΙ Bolzano
Υπενθύμιση:	(Fermat): $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$, $f\ (a,b)$ παρ/μη στο (το τοπικό ακρότατο) $\Rightarrow \exists\ \xi_0 \in (a,b)$: $f'(\xi_0) = 0$

Αν δείξω ότι το $\xi_0 \neq x_1 \neq x_2$ εφαρμόζω Fermat και βρίσκω $\xi_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\xi_0) = 0$.

$f'(x_1) < 0 \overset{\text{Ταλη}}{\Longrightarrow} \xi_1 \in (x_1, x_2)$ $f(\xi_1) < f(x_1)$. (I)

$f(x_2) > 0 \overset{\text{Ταλη}}{\Longrightarrow} \exists\ \xi_2 \in (x_1, x_2)$ $f(\xi_2) < f(x_2)$.

Τελειώσα ματι

Έστω ότι το $\xi_0 = x_1$. Είχα $f(\xi_0) \le f(x)\ \forall x \in [x_1, x_2]$
$\Downarrow$
$f(x_1) \le f(\xi_1)$.

και από (I) $\Rightarrow$ άτοπο

Ομοίως $\xi_0 \neq x_2$.

▸ Παραλλαγή

$g(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$.

$x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$.

$g'(x_1) < \lambda < g'(x_2)$

ΝΔΟ $\exists\ \xi_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $g'(\xi_0) = \lambda$.

απόδειξη

$f(x) = g(x) - \lambda \cdot x$

$f'(x) = g'(x) - \lambda$

$\left.\begin{array}{l} f'(x_1) = g'(x_1) - \lambda^{*} \\ f'(x_2) = g'(x_2) - \lambda \end{array}\right\} \text{I}$

$g(x_1) < \lambda < g'(x_1)$ II

$\Downarrow$

$f'(x_1) < 0\ f'(x_2)$

Εφαρ. παρ. άσκηση:

$\Rightarrow \exists\ \xi_0\ f'(\xi_0) = 0$

$\Downarrow$

$g'(\xi_0) - \lambda = 0 \Rightarrow g'(\xi_0) = \lambda$.

▸ Παραλλαγή (πιο ωραία)

$\boxed{\begin{array}{l} I = \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}. \\ \text{Έστω } g\ I \to \mathbb{R} \text{ παρ/μη ΝΔΟ } g'(I) \text{ διάστημα} \end{array}}$ Θ. Darboux.

Λύση – $\forall\ x, y \in I$ με $x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq I$.

$\Updownarrow$

$\forall\ x, y,\ \forall \lambda \quad x < \lambda < y \Rightarrow \lambda \in I$

$g'(I)$ διάστημα $\forall\ g'(x), g'(y)$ με $x, y \in I$.

$g(I)$ διάστημα σημαίνει ότι $\forall\ g'(x), g'(y)$ με $x, y \in I$
και $g(x) < \lambda < g'(y) \Rightarrow \lambda \in g'(I)$

$\lambda = g'(\xi_0)$ με $\xi_0 \in I$.

Τέλος Άσκησης, εφαρμόζω προηγούμενη με $x = x_1$ και $y = x_2$,

▸ Παραλλαγή

Έστω $g(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$

g παρ/μη

Φ4

$$\boxed{\begin{aligned}&g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a,b)\\ &\Rightarrow g'(x)>0 \ (\forall x\in(a,b))\\ &\text{είτε } g'(x)<0 \ (\forall x\in(a,b))\end{aligned}}$$

-απόδειξη

Έστω (για άτοπο) συνεπαγωγή δεν ισχύει

άρα $\exists\, x_1\in(a,b)$ $g'(x_1)<0$
$\exists\, x_2\in(a,b)$ $g'(x_2)>0$ $\Big\}\Rightarrow g'(x_1)<0<g'(x_2)$.

$\Rightarrow$ προηγ. Άσκηση $\exists\, \xi_0\in(x_1,x_2)$ ώστε

$g'(\xi_0)=0$ Άτοπο

γιατί $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$.

ΘΜΤ του Cauchy

$f,g : [a,b]\to\mathbb{R}$

f,g συνεχής στο $[a,b]$

παραγ στο (a,b)

$\overset{\exists}{\Longrightarrow}\ \xi_0\in(a,b)$

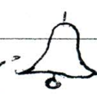
$$f'(\xi_0)\cdot(g(b)-g(a)) = g'(\xi_0)(f(b)-f(a))$$

Πόρισμα

$$\frac{f'(\xi_0)}{g'(\xi_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Αν έχεις $g(b)-g(a)\neq 0$ δεν έχουν f,g κοινή ρίζα

► Άσκηση



$h:(a,b)\to\mathbb{R}$

h 2 φορές παρ/μη και $\exists\, \xi_x$ μεταξύ x, x_0 ώστε

$$\boxed{h(x)=h(x_0)+h'(x_0)(x-x_0)+\frac{h''(\xi_x)}{2}(x-x_0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(x)-h(x_0)-h'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \boxed{\frac{h''(\xi_x)}{2}}$$

95

Έστω $x\in(a,b)$ σταθερό, $x\neq x_0$, Έστω $x_0>x$

ΘΜΤC στο $[x,x_0]$.

$\left(\begin{array}{l}⊛ = f(t)\\ x_0\to t\end{array}\right)$ $f(t)=h(x)-h(t)-h'(t)(x-t)$

$f(x)=0$, $f(x_0)=⊛$.

Άσκηση 51 σελ 86 βιβλ. κ Γιαννόπουλου

$g(t)=(x-t)^2$

$g(x)=0$

$g(x_0)= **$.

Ελέγχω ότι ισχύουν οι υποθέσεις

$\Rightarrow \exists\, \xi_x \in (x, x_0)$

$$\frac{*}{**} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{-h'(\xi_x) - h''(\xi_x)\cancel{(x-\xi_x)} + \cancel{h'(\xi_x)}}{-2\cancel{(x-\xi_x)}} = \frac{h''(\xi_x)}{2}$$

Άσκηση

$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγ

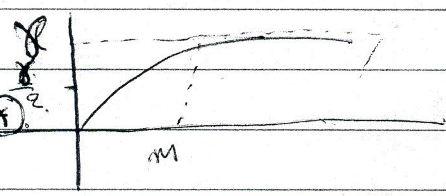
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

ΝΔΟ Αν $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ ή $= \pm\infty$ τότε $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

- Λύση: Έστω $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \gamma \neq 0\ (\gamma \in \mathbb{R})$.

Παρατήρηση:

$\exists\, M>0$ ώστε $\forall x > M$, $|f'(x)| > \left|\frac{\gamma}{2}\right|$ (*)



$||f'(x)| - |\gamma|| \leq |f'(x) - \gamma| < \varepsilon$

$-\varepsilon < |f'(x)| - |\gamma| < \varepsilon$

$-\varepsilon + |\gamma| < |f'(x)|$

διαλέγω $\varepsilon = \frac{|\gamma|}{2} > 0$ και από ορισμό ορίου βρίσκω $M>0$ ώστε $\forall\, x > M$ να ισχύει (*)

ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\, \xi_x \in (M, x)$ $f'(\xi_x) = \frac{f(x)-f(M)}{x-M} \Leftrightarrow f(x)-f(M) = (x-M) f'(\xi_x)$

$\Rightarrow |f(x)-f(M)| = |x-M||f'(\xi_x)| > |x-M|\frac{|\gamma|}{2}$

Άτοπο γιατί $\lim_{x\to+\infty} |f(x)-f(M)| \geq \lim_{x\to+\infty} |x-M|\frac{|\gamma|}{2}$

$\Rightarrow A = |L - f(M)| \in \mathbb{R}$, $B = +\infty$, $A \geq B$ άτοπο.

Άρα $\exists\, M$ $x>M$ $|f'(x)| > 1$ και τα ίδια.