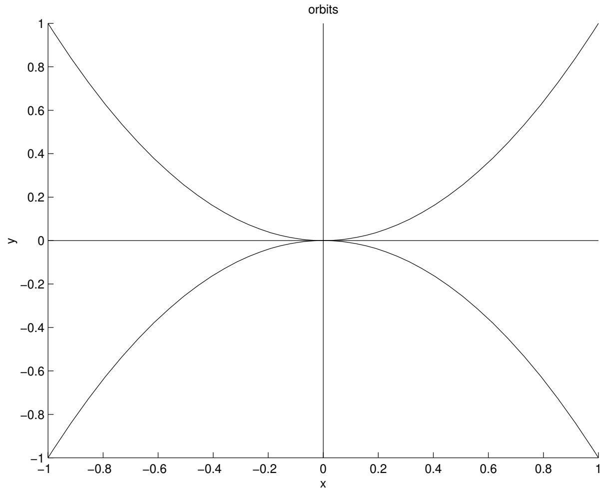
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΦΑΣΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Σ.Δ.Ε. ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Έστω το Γραμμικό Σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

$$y' = Ay. \tag{1}$$

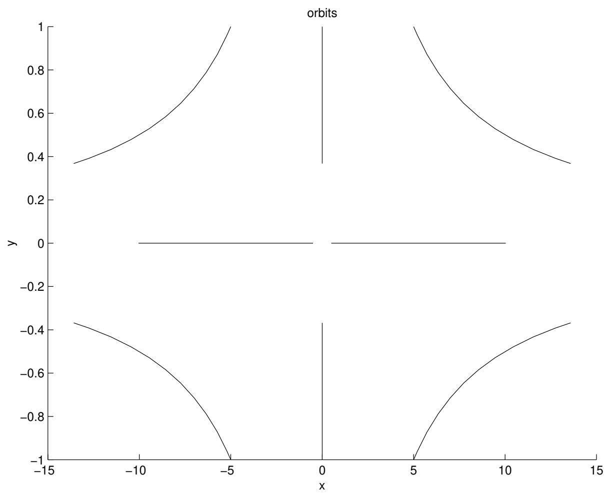
Μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για τον πίνακα A

1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 ομόσημες πραγματικές ιδιοτιμές.



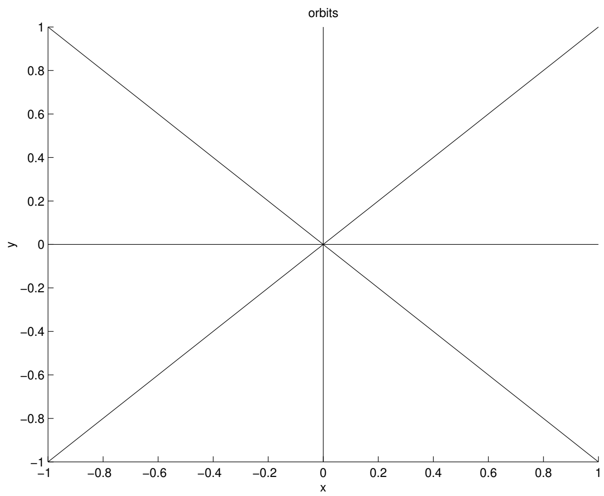
Σχ.1 κόμβος

2) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 ετερόσημες πραγματικές ιδιοτιμές.



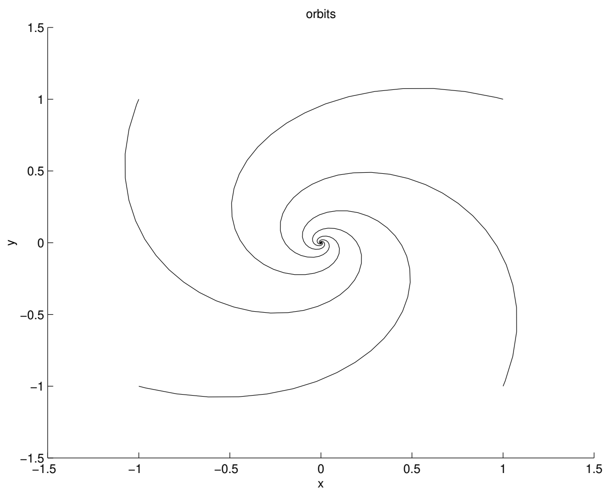
Σχ.2 σάγμα

3) $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, λ_0 πραγματική διπλή ιδιοτιμή.



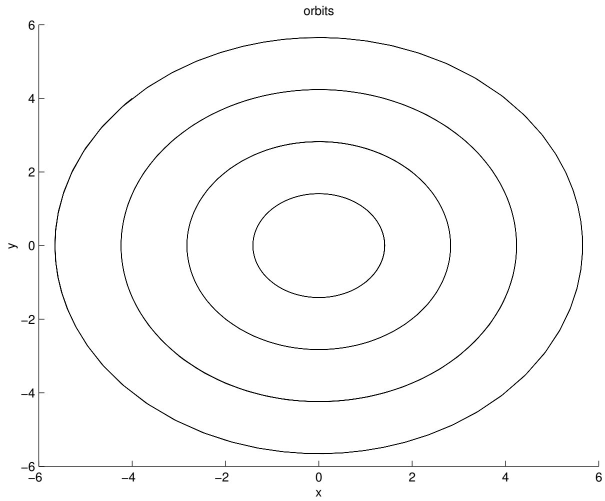
Σχ.3 αστεροειδής κόμβος

4) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a + -ib$ μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές, $a \neq 0,\ b > 0$.



Σχ.4 εστία

5) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a + -ib$ μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές, $a = 0,\ b > 0$.



Σχ.5 κέντρο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αρμονικός ταλαντωτής

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \; \omega > 0, \tag{2}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 x, \;\; (0,0) \text{ σημείο ισορροπίας.} \end{aligned} \tag{3}$$

Δείξτε πειραματικά ότι οι τροχιές είναι ομόκεντρες ελλείψεις.

Λύση:

Υλοποιούμε σαν mfile για $\omega = 1$, την συνάρτηση

$function \;\; ex1 = ex1(t, y)$

$ex1 = [y(2) \;\;\; -y(1)]';$

και το σώζουμε με το όνομα ex1.m.

Επίσης γράφουμε το mfile

$format \;\; long \;\; e$

$options = odeset('RelTol', 1e-4, ' AbsTol', [1e-4 \;\; 1e-4]);$

$title('orbits')$

$xlabel('x')$

$ylabel('y')$

$hold\ \ on$

$fork = 1 : 20$

$[t, u] = ode45('ex1', [0, 100], [0.1 * k, 0.1 * k], options);$

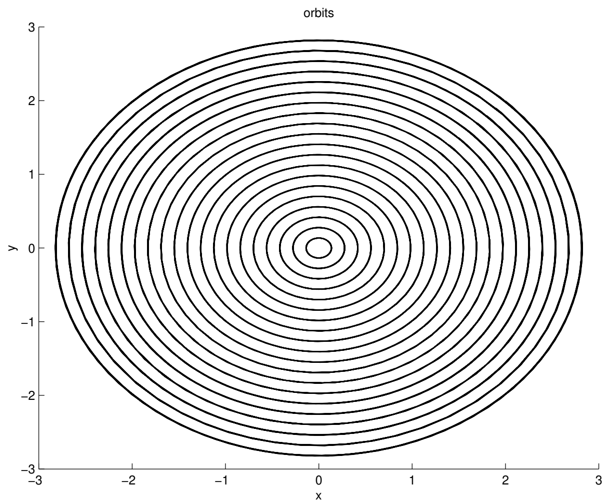
$plot(u(:, 1), u(:, 2))$

end

$hold\ \ off$

και το σώζουμε με το όνομα ask1.m.

Τρέχοντας το με την εντολή $ask1$ λαμβάνουμε την εικόνα



Σχ.6 Διάγραμμα φάσης

2)Ελατήριο με απόσβεση

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0, \tag{4}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2y - 2x, \quad (0,0) \text{ σημείο ισορροπίας.} \end{aligned} \tag{5}$$

Δείξτε πειραματικά ότι οι τροχιές είναι ελλειπτικές σπείρες.

Λύση:

Υλοποιούμε σαν mfile την συνάρτηση

$function\ \ ex2 = ex2(t, y)$

$ex2 = [y(2)\ \ \ -2 * y(2) - 2 * y(1)]';$

και το σώζουμε με το όνομα ex2.m.

Επίσης γράφουμε το mfile

$format\ \ long\ \ e$

$options = odeset('RelTol', 1e-4, 'AbsTol', [1e-4\ \ 1e-4]);$

$title('orbit')$

$xlabel('x')$

$ylabel('y')$

$hold\ \ on$

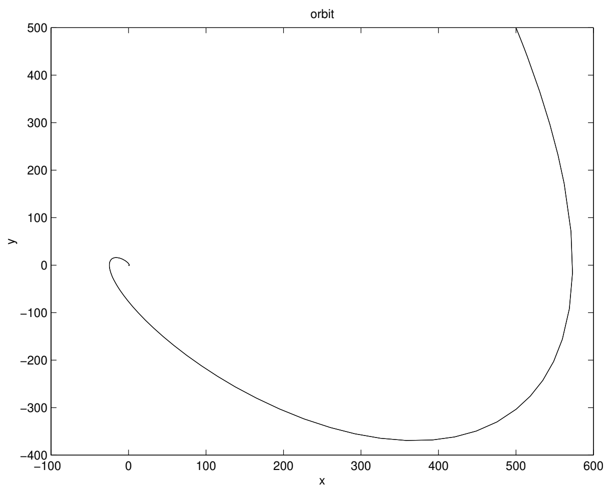
$[t, u] = ode45('ex2', [0, 100], [500, 500], options);$

$plot(u(:, 1), u(:, 2))$

$hold\ \ off$

και το σώζουμε με το όνομα ask2.m.

Τρέχοντας το με την εντολή $ask2$ λαμβάνουμε την εικόνα



Σχ.7 Σπειροειδής τροχιά

3)Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= 3x + y(1 - x^2 - y^2),\ (0,0) \text{ σημείο ισορροπίας.} \end{aligned} \tag{6}$$

Δείξτε πειραματικά ότι οι τροχιές σχηματίζουν οριακό κύκλο.

Λύση:

Υλοποιούμε σαν mfile την συνάρτηση

$function\ \ ex3 = ex3(t, y)$

$ex3 = [-3 * y(2) + y(1) * (1 - y(1)^2 - y(2)^2)\ \ 3 * y(1) + y(2) * (1 - y(1)^2 - y(2)^2)]';$

και το σώζουμε με το όνομα ex3.m.

Επίσης γράφουμε το mfile

$format\ \ long\ \ e$

$options = odeset('RelTol', 1e-4, 'AbsTol', [1e-4\ \ 1e-4]);$

$title('orbits')$

$xlabel('x')$

$ylabel('y')$

$hold\ \ on$

$[t, u] = ode45('ex3', [0, 100], [2, 2], options);$

$plot(u(:, 1), u(:, 2))$

$[t, u] = ode45('ex3', [0, 100], [-2, 2], options);$

$plot(u(:, 1), u(:, 2))$

$[t, u] = ode45('ex3', [0, 100], [-2, -2], options);$

$plot(u(:, 1), u(:, 2))$

$[t, u] = ode45('ex3', [0, 100], [2, -2], options);$

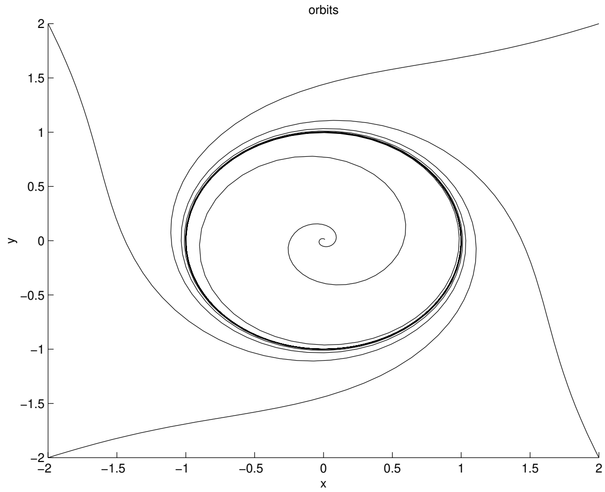
$plot(u(:, 1), u(:, 2))$

$[t, u] = ode45('ex3', [0, 100], [0.01, 0.01], options);$

$plot(u(:, 1), u(:, 2))$

και το σώζουμε με το όνομα ask3.m.

Τρέχοντας το με την εντολή $ask3$ λαμβάνουμε την εικόνα



Σχ.8 Οριακός κύκλος