1 σ-άλγεβρες και μέτρα

Ορισμός 1.1 *Αν $\Omega \neq \emptyset$ σύνολο, μια **άλγεβρα υποσυνόλων** του Ω είναι μια οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ που περιέχει το Ω και είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και πεπερασμένες ενώσεις (άρα και πεπερασμένες τομές), δηλαδή*

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- *συμπληρώματα:* $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- *ενώσεις:* $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

*Μια άλγεβρα υποσυνόλων $\mathcal{S}$ του Ω λέγεται **σ-άλγεβρα** αν επιπλέον είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις (άρα και αριθμήσιμες τομές), δηλαδή*

- $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$

*Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{S})$ λέγεται **μετρήσιμος χώρος**.*

Ορισμός 1.2 ***Χώρος μέτρου*** *είναι μια τριάδα $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ όπου:*

- $\Omega \neq \emptyset$ *σύνολο,*
- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και*
- $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *ένα μέτρο, δηλαδή:*
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - *αριθμήσιμη προσθετικότητα: αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$ και $A_n \cap A_m = \emptyset$ για $n \neq m$ τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Παραδείγματα 1.1 ***(1)*** *Ω=δειγματικός χώρος, $\mathcal{S}$=ενδεχόμενα, μ=πιθανότητα.*

(2) *$\Omega = \mathbb{R}^d$ ή μια μπάλα, μ= «μέγεθος απλών υποσυνόλων» ($d = 1$: μήκος, $d = 2$: εμβαδόν, $d = 3$: όγκος), $\mathcal{S}$= όλα τα υποσύνολα που «έχουν μέγεθος»: εδώ η $\mathcal{S}$ προσδιορίζεται από το μ.*

Παρατήρηση 1.2 *Η τομή σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα.*

Συνεπώς αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, υπάρχει η μικρότερη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{A})$ που περιέχει το $\mathcal{A}$.

*Τα στοιχεία της σ-άλγεβρας που παράγεται από τα ανοικτά σύνολα σ'ένα μετρικό (ή τοπολογικό) χώρο ονομάζονται **σύνολα Borel**.*

Λήμμα 1.3 *Αν $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ είναι άλγεβρα συνόλων, τότε*

$$\sigma(\mathcal{D}) = m(\mathcal{D}),$$

όπου $m(\mathcal{D})$ είναι η μονότονη κλάση που παράγεται από την $\mathcal{D}$, δηλαδή η μικρότερη οικογένεια που περιέχει την $\mathcal{D}$ και είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις αυξουσών οικογενειών και αριθμήσιμες τομές φθινουσών οικογενειών.

Πρόταση 1.4 *Αν $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $A, B \in \mathcal{S}$ με $A \subseteq B$, τότε*

(ι) $\mu(A) \leq \mu(B)$

(ιι) Αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Σχέδιο απόδειξης $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$.

Παρατήρηση Στο (ιι) η υπόθεση $\mu(A) < \infty$ δεν μπορεί να παραλειφθεί: παράδειγμα $B = \mathbb{N}$, $A = 2\mathbb{N}$ ή $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 7\}$.

Πρόταση 1.5 *Αν $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $A_n \in \mathcal{S}$, τότε $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.*

Σχέδιο απόδειξης Τα κάνουμε ξένα θέτοντας $B_n = A_n \setminus \cup_{i<n} A_i$.

Πρόταση 1.6 *Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A_n \in \mathcal{S}$.*

(α) Αν (A_n) αύξουσα, τότε $\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

*(β) Αν (A_n) φθίνουσα **και** $\mu(A_1) < \infty$, τότε $\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.*

Παρατήρηση Στο (β) η υπόθεση $\mu(A_1) < \infty$ δεν μπορεί να παραλειφθεί: παράδειγμα $\Omega = \mathbb{N}$, $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k > n\}$.

Σχέδιο απόδειξης (ι) Τα κάνουμε ξένα θέτοντας $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.

(ιι) Χρησιμοποιούμε το (ι) στην $(A_1 \setminus A_n)_n$ και την Πρόταση 1.4.

Πρόταση 1.7 *Έστω $(\Omega, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και μ ένα* πεπερασμένα προσθετικό[1] *μέτρο στην $\mathcal{S}$.*

(ι) Υποθέτουμε ότι για κάθε $\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ αύξουσα, ισχύει $\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$. Τότε το μ είναι μέτρο (δηλ. σ-προσθετικό).

(ιι) Υποθέτουμε ότι για κάθε $\{C_n\} \subseteq \mathcal{S}$ φθίνουσα με $\cap_n C_n = \emptyset$, ισχύει $\lim_n \mu(C_n) = 0$. Τότε το μ είναι μέτρο.

[1] δηλ. $\mu(\emptyset) = 0$ και αν $A, B \in \mathcal{S}$ είναι ξένα τότε $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Σχέδιο απόδειξης Έστω $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$ ξένα ανά δύο. Να δείξω ότι

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

με δεδομένο ότι

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} B_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n)$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

(ι) Εφαρμόζουμε την υπόθεση στα $A_n = \cup_{i \leq n} B_i$.

(ιι) Εφαρμόζουμε την υπόθεση στα $C_n = \cup_{i \geq n} B_i$. :

$$\mu(\bigcup_{i\geq 1} B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) + \mu(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) + \mu(C_{n+1}) \to \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) + 0.$$

Ορισμός 1.3 *Ένα μέτρο μ στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{S})$ λέγεται*

- ***πεπερασμένο**, αν $\mu(\Omega) < \infty$.*
- ***μέτρο πιθανότητας**, αν $\mu(\Omega) = 1$.*
- *σ-**πεπερασμένο**, αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$ με $\cup A_n = \Omega$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε n.*

Ορισμός 1.4 *Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένα υποσύνολο $N \subseteq \Omega$ λέγεται μ-**μηδενικό** αν υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ με $A \supseteq N$ και $\mu(A) = 0$.*

*Ο χώρος $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ λέγεται **πλήρης** όταν τα μηδενικά σύνολα είναι μετρήσιμα.*

*Κάθε χώρος μέτρου έχει **πλήρωση**:*

Ορίζουμε τον $(\Omega, \mathcal{S}_\mu, \bar{\mu})$ ως εξής:

$$\mathcal{S}_\mu = \{A \subseteq \Omega : \exists E, F \in \mathcal{S} \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = 0\}$$

και

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &: \mathcal{S}_\mu \to [0, +\infty] \\ & A \to \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{S}, B \subseteq A\} \quad (= \mu(E) = \mu(F)). \end{aligned}$$

Πρόταση 1.8 *Η $\mathcal{S}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{S}$ και το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο στην $\mathcal{S}_\mu$ που επεκτείνει το μ.*

Παρατηρήσεις 1.9 *Το $\bar{\mu}$ είναι η μοναδική επέκταση του μ στην $\mathcal{S}_\mu$.*

Το μέτρο μ είναι πλήρες αν και μόνον αν $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mu$.