Θεωρία Μέτρου: Ασκήσεις 1

Άσκηση 1.1 (Κ:2-1) Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \in \mathcal{S}$. Ορίζω

$$\nu(B) = \mu(A \cap B), \qquad B \in \mathcal{S}.$$

Να αποδειχθεί ότι το ν είναι μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{S})$.

Άσκηση 1.2 (Κ:2-2) Έστω $(\Omega, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ ακολουθία μέτρων στον $(\Omega, \mathcal{S})$ που είναι αύξουσα, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{S}$ η ακολουθία $\{\mu_n(A)\}$ είναι αύξουσα. Θέτουμε

$$\mu(A) = \lim_n \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Να αποδειχθεί ότι το μ είναι μέτρο.

Άσκηση 1.3 (Κ:2-3) Έστω $(\Omega, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ ακολουθία μέτρων στον $(\Omega, \mathcal{S})$.

$$\text{(α) Αν} \quad \mu(A) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{S}$$

να αποδειχθεί ότι το μ είναι μέτρο.

(β) Αν κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, να αποδειχθεί ότι το

$$\nu(A) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{S}$$

είναι μέτρο (πιθανότητας).

Άσκηση 1.4 (Κ:2-8) Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$ οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων με $\mu(F) > 0$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$. Δείξτε ότι η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη.

Άσκηση 1.5 (Κ:1-1, 2-10) Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}$ με $\sum_n \mu(A_n) < \infty$. Θέτω

$$A = \{x \in \Omega : \text{υπάρχουν άπειρα } n \text{ ώστε} x \in A_n\}.$$

Να αποδειχθεί (α) ότι

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

και (β) ότι $\mu(A) = 0$.