2 Εξωτερικά μέτρα και μέτρα

Ορισμός 2.1 *Έστω Ω σύνολο. Μια συνολοσυνάρτηση $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty\}$ λέγεται* ***εξωτερικό μέτρο*** *στο Ω αν*

- $\phi(\emptyset) = 0$.
- *(μονοτονία)* $A \subseteq B \subseteq \Omega \implies \phi(A) \leq \phi(B)$
- *(σ-υποπροσθετικότητα) Αν* $\{A_n : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *τότε*

$$\phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Παρατήρηση 2.1 *Σύγκριση με την έννοια του μέτρου:*
(ι) Ένα εξωτερικό μέτρο ορίζεται σ'ολόκληρο το δυναμοσύνολο
(ιι) δεν είναι όμως κατ'ανάγκη (ούτε πεπερασμένα) προσθετικό, αλλά μόνο σ-υποπροσθετικό.

Παράδειγμα 2.2 (Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue) $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty] :$

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n),\ a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n \right\}.$$

Πρόταση 2.3 *Το λ^* είναι εξωτερικό μέτρο.*

Πρόταση 2.4 *Το λ^* «επεκτείνει» το μήκος: Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$,*

$$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*((a,b]) = \lambda^*([a,b)) = \lambda^*((a,b)) = b - a.$$

Επίσης αν $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη φραγμένο διάστημα, *τότε $\lambda^*(I) = +\infty$.*

Θα δείξουμε ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue επάγει ένα σ-προσθετικό μέτρο ορισμένο σε μια σ-άλγεβρα που είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να περιλαμβάνει τα διαστήματα.

Μάλιστα, κάθε εξωτερικό μέτρο ϕ επάγει ένα σ-προσθετικό μέτρο ορισμένο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_\phi$ των ϕ-**μετρήσιμων** συνόλων:

Ορισμός 2.2 *Έστω $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο. Ένα $B \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ϕ-**μετρήσιμο** αν*

$$\text{για } \textbf{κάθε } A \subseteq R, \qquad \phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

$$\text{Θέτουμε} \quad \mathcal{M}_\phi = \{B \subseteq \Omega : \ B \ \phi\text{-μετρήσιμο}\}.$$

Παρατήρηση 2.5 *Έστω $B \subseteq \Omega$.*

- *Αν $\phi(B) = 0$, τότε $B \in \mathcal{M}_\phi$.*
- *Για να δείξω ότι $B \in \mathcal{M}_\phi$, αρκεί να δείξω ότι*

$$\text{για κάθε } A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) \geq \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

- *Μάλιστα αρκεί να δείξω την ανισότητα αυτή για κάθε A με $\phi(A) < \infty$.*

Θεώρημα 2.6 (Καραθεοδωρή) *Αν ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο Ω, τότε*

- *Η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και*
- *Το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι πλήρες μέτρο.*

Βήματα απόδειξης:

1. Η $\mathcal{M}_\phi$ είναι άλγεβρα.
2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\phi(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_2)$$

$$\text{άρα} \quad \phi(B_1 \cup B_2) = \phi(B_1) + \phi(B_2)$$

   οπότε το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι πεπερασμένα προσθετικό.

3. Αν $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα ανά δύο, τότε
   - $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}_\phi$ και
   - $\phi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(B_n)$

   οπότε η $\mathcal{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι σ-προσθετικό.

Επομένως ο χώρος $(\Omega, \mathcal{M}_\phi, \phi|_{\mathcal{M}_\phi})$ είναι χώρος μέτρου. Ότι είναι πλήρης έπεται τώρα από την Παρατήρηση 2.5.

Βήμα 1. (α) $\Omega \in \mathcal{M}_\phi$: προφανές.

(β) Αν $B \in \mathcal{M}_\phi$, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c)\\ &= \phi(A \cap (B^c)^c) + \phi(A \cap B^c)\end{aligned}$$

άρα $B^c \in \mathcal{M}_\phi$.

(γ) Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$, να δείξω ότι $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{M}_\phi$: Έστω $A \subseteq \Omega$. Επειδή $B_1 \in \mathcal{M}_\phi$ έχουμε

$$\phi(A) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_1^c). \tag{1}$$

Επειδή $B_2 \in \mathcal{M}_\phi$ έχουμε

$$\phi(A \cap B_1) = \phi((A \cap B_1) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1) \cap B_2^c) \tag{2}$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\phi(A) = \phi((A \cap B_1) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1) \cap B_2^c) + \phi(A \cap B_1^c). \tag{3}$$

Αλλά

$$\begin{aligned}&B_1 \cap B_2^c = B_1 \setminus B_2 = B_1 \setminus (B_1 \cap B_2) = B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^c\\ &\text{και} \quad B_1^c = B_1^c \cap (B_1 \cap B_2)^c \quad (\text{διότι } B_1^c \subseteq (B_1 \cap B_2)^c)\end{aligned}$$

οπότε η (3) γίνεται

$$\phi(A) = \phi((A \cap B_1) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1) \cap (B_1 \cap B_2)^c) + \phi(A \cap B_1^c \cap (B_1 \cap B_2)^c). \tag{4}$$

Αν $C \equiv A \cap (B_1 \cap B_2)^c$, επειδή $B_1 \in \mathcal{M}_\phi$ έχουμε

$$\phi(C) = \phi(C \cap B_1) + \phi(C \cap B_1^c)$$

δηλαδή $\quad \phi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c) = \phi(A \cap B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^c) + \phi(A \cap B_1^c \cap (B_1 \cap B_2)^c)$

οπότε η (4) γίνεται

$$\phi(A) = \phi(A \cap (B_1 \cap B_2)) + \phi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c)$$

άρα, εφόσον το $A \subseteq \Omega$ είναι τυχαίο, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{M}_\phi$.

Βήμα 2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\phi$, και $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, τότε $(B_1 \cup B_2) \cap B_1 = B_1$ και $(B_1 \cup B_2) \cap B_1^c = B_2$, οπότε για κάθε $A \subseteq \Omega$, θέτοντας $C = A \cap (B_1 \cup B_2)$ έχουμε, αφού $B_1 \in \mathcal{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}\phi(A \cap (B_1 \cup B_2)) &= \phi(C) = \phi(C \cap B_1) + \phi(C \cap B_1^c) \\ &= \phi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \phi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) \\ &= \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_2).\end{aligned}$$

Βήμα 3. Αν $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}_\phi$ είναι ξένα ανά δύο και $B = \bigcup_n B_n$, θα δείξω ότι για κάθε $A \subseteq \Omega$,

$$\phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi(A \cap B^c) \qquad (5)$$

οπότε

$$\phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c)$$

άρα $B \in \mathcal{M}_\phi$ και

$$\phi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(B_n)$$

άρα το $\phi|_{\mathcal{M}_\phi}$ είναι σ-προσθετικό.

Πράγματι, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, επειδή $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathcal{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)\right) + \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c\right) \quad \text{(Βήμα 2)} \\ &\geq \sum_{n=1}^{N} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right)\end{aligned}$$

διότι $A \cap B^c \subseteq A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c$. Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε $N \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)\right) + \phi\left(A \cap B^c\right)$$

λόγω της σ-υποπροσθετικότητας του ϕ. Αλλά $\cup_n(A \cap B_n) = A \cap (\cup_n B_n) = A \cap B$, άρα

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)\right) + \phi\left(A \cap B^c\right) = \phi(A \cap B) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A)$$

πάλι από την υποπροσθετικότητα. Δηλαδή

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A \cap B) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A)$$

συνεπώς ισχύει ισότητα, και η (5) αποδείχθηκε. $\square$

Ορισμός 2.3 *Το* ***μέτρο Lebesgue*** *λ στο $\mathbb{R}$ είναι ο περιορισμός του λ^* στην $\mathcal{M}_{\lambda^*}$.*

Πρόταση 2.7 *Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Απόδειξη Η σ-άλγεβρα Borel παράγεται από τα διαστήματα της μορφής $\Delta = (-\infty, b)$. Αφού λοιπόν η $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ είναι σ-άλγεβρα, αρκεί να δείξω ότι κάθε τέτοιο διάστημα ανήκει στην $\mathcal{M}_{\lambda^*}$, δηλαδή ικανοποιεί

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap \Delta) + \lambda^*(A \cap \Delta^c)$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) < \infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό (βλ. Παράδειγμα 2.2) του εξωτερικού μέτρου Lebesgue λ^*, υπάρχουν ανοικτά φραγμένα διαστήματα $I_n, n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$A \subseteq \bigcup_n I_n \quad \text{και} \quad \sum_n m(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon \tag{6}$$

(όπου με $m(I)$ συμβολίζουμε για συντομία το μήκος $b - a$ ενός διαστήματος I με άκρα a, b όπου $a \leq b$). Έχουμε

$$A \cap \Delta \subseteq \bigcup_n (I_n \cap \Delta) \qquad \text{και} \qquad A \cap \Delta^c \subseteq \bigcup_n (I_n \cap \Delta^c).$$

Παρατηρούμε όμως ότι, αφού $\Delta = (-\infty, b)$, τα σύνολα $I_n \cap \Delta$ και $I_n \cap \Delta^c$ είναι όλα διαστήματα (ενδεχομένως κάποια να είναι κενά ή όχι ανοικτά). Κατά συνέπεια ισχύει $\lambda^*(I_n\cap\Delta) = m(I_n\cap\Delta)$ και $\lambda^*(I_n\cap\Delta^c) = m(I_n\cap\Delta^c)$ (Πρόταση 2.4). Από την σ-υποπροσθετικότητα του λ^* έχουμε τώρα

$$\lambda^*(A\cap\Delta) \le \lambda^*\left(\bigcup_n (I_n\cap\Delta)\right) \le \sum_n \lambda^*(I_n\cap\Delta) = \sum_n m(I_n\cap\Delta)$$

$$\text{και}\quad \lambda^*(A\cap\Delta^c) \le \lambda^*\left(\bigcup_n (I_n\cap\Delta^c)\right) \le \sum_n m(I_n\cap\Delta^c).$$

Αλλά $m(I_n\cap\Delta) + m(I_n\cap\Delta^c) = m(I_n)$ [1] και επομένως

$$\lambda^*(A\cap\Delta)+\lambda^*(A\cap\Delta^c) \le \sum_n \left(m(I_n\cap\Delta)+m(I_n\cap\Delta^c)\right) = \sum_n m(I_n) \stackrel{(6)}{\le} \lambda^*(A)+\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, η ζητούμενη ανισότητα αποδείχθηκε. $\square$

Παρατήρηση 2.8 *Για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &= \inf\{\lambda(V) : V \text{ ανοικτό}, A\subseteq V\}\\ &= \inf\{\lambda(B) : B \text{ Borel}, A\subseteq B\}.\end{aligned}$$

Ορισμός 2.4 *Έστω $(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ χώρος μέτρου. Αν $A\subseteq\Omega$, ορίζουμε*

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \inf\{\mu(B) : B\in\mathcal{S},\ A\subseteq B\}\\ \mu_*(A) &= \sup\{\mu(C) : C\in\mathcal{S},\ C\subseteq A\}.\end{aligned}$$

Έχουμε πάντα $\mu_*(A) \le \mu^*(A)$ και προφανώς αν $A\in\mathcal{S}$ τότε $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$.

Πρόταση 2.9 *Έστω $(\Omega,\mathcal{S},\mu)$ χώρος μέτρου.*
(α) *Για κάθε $A\subseteq\Omega$ υπάρχει $B\in\mathcal{S}$ με $A\subseteq B$ και $\mu^*(A)=\mu(B)$.*
(β) *Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.*
(γ) *Αν $(\Omega,\mathcal{S}_\mu,\bar\mu)$ είναι η πλήρωση του $(\Omega,\mathcal{S},\mu)$, ισχύουν $\mathcal{S}_\mu\subseteq\mathcal{M}_{\mu^*}$ και $\mu^*|_{\mathcal{S}_\mu}=\bar\mu$.*
(δ) *Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε $\mathcal{S}_\mu=\mathcal{M}_{\mu^*}$.*

---

[1] Η ισότητα ισχύει τετριμένα αν $I_n\cap\Delta=\emptyset$ ή $I_n\cap\Delta^c=\emptyset$. Αλλιώς, αν το I_n έχει άκρα $x\le y$ και $\Delta=(-\infty,b)$ τότε $m(I_n\cap\Delta)+m(I_n\cap\Delta^c)=(b-x)+(y-b)=m(I_n)$.

Πόρισμα 2.10 *Ο χώρος μέτρου* $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda^*)$ *είναι η πλήρωση του χώρου μέτρου* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^*)$. *Επομένως για κάθε* $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *με* $A \subseteq B$ *και* $\lambda(B) = \lambda(A)$.

Πρόταση 2.11 *Έστω* $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ *χώρος μέτρου και* $A \subseteq \Omega$ *με* $\mu^*(A) < \infty$. *Τότε* $A \in \mathcal{S}_\mu$ *αν και μόνον αν* $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

Πρόταση 2.12 *Έστω* μ *πεπερασμένο μέτρο Borel στο* $\mathbb{R}$. *Ορίζουμε*

$$F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad F_\mu(t) = \mu((-\infty, t]).$$

Η F_μ *είναι φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής και* $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\mu(x) = 0$.

Η F_μ *λέγεται* ***συνάρτηση κατανομής*** *του* μ.

Πρόταση 2.13 *Έστω* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής με* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. *Υπάρχει τότε μοναδικό πεπερασμένο μέτρο Borel* μ_F *στο* $\mathbb{R}$ *με συνάρτηση κατανομής ίση με* F.

Παρατήρηση 2.14 *Το* μ_F *καθορίζεται από τη σχέση*

$$\mu_F(A) = \inf \left\{ \sum_n (F(b_n) - F(a_n)) : A \subseteq \bigcup_n (a_n, b_n) \right\}, \quad A \subseteq \mathbb{R} \text{ Borel}$$

με τον ίδιο τρόπο που το μέτρο Lebesgue καθορίζεται στα σύνολα Borel από το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.