Θεωρία Μέτρου: Ασκήσεις 2

Άσκηση 2.1 (K:3-3) Έστω $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \subseteq \Omega$. Τότε
$$\mu_*(A) + \mu^*(\Omega \setminus A) = \mu(\Omega).$$

Άσκηση 2.2 (K:3-4) Ένα $A \subseteq [0,1]$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνον αν $\lambda^*(A) + \lambda^*(A^c) = 1$.

Άσκηση 2.3 (K:3-5) Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνον αν $\lambda^*(A \cap (a,b)) + \lambda^*(A^c \cap (a,b)) = b - a$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$.

Άσκηση 2.4 (K:3-12) [Θεώρημα Επέκτασης Καραθεοδωρή] Ένα αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο ορισμένο σε μια άλγεβρα επεκτείνεται στην παραγόμενη σ-άλγεβρα: Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του Ω και $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ένα αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο, δηλ. $\mu(\emptyset) = 0$ και $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει μέτρο $\tilde{\mu}$ στην παραγόμενη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{A})$ που επεκτείνει το μ.

Άσκηση 2.5 (K:3-13) (Συνέχεια της προηγούμενης) Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Αν υπάρχουν $\Omega_n \in \mathcal{A}$ ώστε $\cup_n \Omega_n = \Omega$, τότε δύο σ-προσθετικά μέτρα που είναι πεπερασμένα σε κάθε Ω_n και ταυτίζονται στην $\mathcal{A}$ αναγκαστικά ταυτίζονται στην $\sigma(\mathcal{A})$.

Άσκηση 2.6 (K:3-18) Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής με $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ και μ το μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu((-\infty, x]) = F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \le b$,

$$\begin{array}{ll} \mu((-\infty, a)) = F(a-), & \mu([a,b]) = F(b) - F(a-), \\ \mu((a,b)) = F(b-) - F(a), & \mu([a,b)) = F(b-) - F(a-) \text{ και} \\ \mu((a,b]) = F(b) - F(a) & \end{array}$$

όπου $F(a-) = \lim\limits_{x \nearrow a} F(x)$. Επίσης δείξτε ότι η F είναι συνεχής αν και μόνον αν $\mu(\{a\}) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.