3 Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Ορισμός 3.1 *Έστω X μετρικός χώρος, $\mathcal{S}$ μια σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά (άρα και τα Borel), μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{S})$. Το μ λέγεται **κανονικό** αν*

(ι) *Για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές ισχύει $\mu(K) < \infty$.*

(ιι) ***[Εξωτερική κανονικότητα]*** *Για κάθε $A \in \mathcal{S}$ ισχύει $\mu(A) = \inf\{\mu(V) : V$ ανοικτό, $A \subseteq V\}$*

(ιιι) ***[Εσωτερική κανονικότητα]*** *Για κάθε $V \subseteq X$ ανοικτό ισχύει $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K$ συμπαγές, $K \subseteq V\}$.*

Πρόταση 3.1 *Το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ είναι κανονικό. Μάλιστα, αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές}, \ K \subseteq A\}.$$

Πόρισμα 3.2 *Ο χώρος μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda^*)$ είναι η πλήρωση του χώρου μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^*)$. Επομένως για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $A \subseteq B$ και $\lambda(B) = \lambda(A)$.*

Πρόταση 3.3 *Το λ είναι το μοναδικό μέτρο Borel μ στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\mu(I) = b - a$ για κάθε φραγμένο διάστημα I με άκρα $a \leq b$.*

Ορισμός 3.2 *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$, θέτουμε*

$$A + x = \{a + x : a \in A\}$$
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B}(A + x)$$
$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Παρατήρηση 3.4 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f_x : a \to a + x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, επί, συνεχής και με αντίστροφη την $f_x^{-1} = f_{-x}$, που είναι συνεχής. Άρα ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνον αν η *μετάθεσή του* $A + x$ είναι κλειστό σύνολο. Εφόσον η f_x^{-1} διατηρεί ενώσεις, τομές και συμπληρώματα, έπεται ότι ένα σύνολο A είναι Borel αν και μόνον αν το $A + x$ είναι Borel.

Παρατηρούμε ότι αν το $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο διάστημα, το $I + x$ είναι φραγμένο διάστημα και $\lambda(I + x) = \lambda(I)$. Έπεται τώρα από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου λ^* ότι

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A + x) \text{ για κάθε } A \subseteq \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως το μέτρο Lebesgue στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις. Το ίδιο ισχύει και στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*})$:

Παρατήρηση 3.5 *Το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις, δηλαδή ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ανήκει στην $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ αν και μόνον αν $(A + x) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και ισχύει $\lambda(A) = \lambda(A + x)$.*

Απόδειξη Αν $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ τότε για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(B) = \lambda^*(B - x) &= \lambda^*((B - x) \cap A) + \lambda^*((B - x) \cap A^c) \\
&= \lambda^*(((B - x) \cap A) + x) + \lambda^*(((B - x) \cap A^c) + x) \\
&= \lambda^*(B \cap (A + x) + \lambda^*(B \cap (A + x)^c)
\end{aligned}$$

άρα $(A + x) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$.
Αν αντίστροφα $(A + x) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ τότε $A = ((A + x) - x) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$.

Τώρα για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lambda(A + x) = \lambda^*(A + x) = \lambda^*(A) = \lambda(A)$$

από την προηγούμενη Παρατήρηση. $\square$

Θεώρημα 3.6 *Αν μ είναι ένα μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ που είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις και πεπερασμένο στα συμπαγή σύνολα τότε είναι πολλαπλάσιο του μέτρου Lebesgue, δηλαδή υπάρχει $a \geq 0$ ώστε $\mu = a\lambda$.*

Απόδειξη Έστω $a = \mu([0, 1))$. Το a είναι πεπερασμένο εφόσον $\mu([0, 1)) \leq \mu([0, 1])$ και το $[0, 1]$ είναι συμπαγές.

Αν $a = 0$ τότε $\mu = 0$ γιατί $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(I_n)$ όπου $I_n = [n, n + 1)$ άρα $\mu(I_n) = a = 0$.

Αν $a > 0$, θέτουμε $\nu(A) = \frac{1}{a}\mu(A)$ και θα δείξουμε ότι $\nu = \lambda$. Αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι $\nu((a, b)) = \lambda((a, b))$ για κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a, b).

Για κάθε n, θέτουμε $D_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$. Θα δείξουμε ότι $\nu(D_{n,k}) = \frac{1}{2^n}$. Πράγματι, επειδή $D_{n,k} = D_{n,1} + k$ έχουμε $\nu(D_{n,k}) = \nu(D_{n,1}) \equiv \nu_n$ και επειδή $D_{n,k} \cap D_{n,j} = \emptyset$ όταν $k \neq j$ έχουμε

$$[0, 1) = \bigcup_{k=1}^{2^n} D_{n,k} \Longrightarrow \nu([0, 1)) = \sum_{k=1}^{2^n} \nu(D_{n,k}) = 2^n \nu_n$$

άρα $\nu_n = \frac{1}{2^n} = \lambda(D_{n,k})$, δηλαδή τα μέτρα ν και λ ταυτίζονται στα διαστήματα της μορφής $D_{n,k}$. Όμως κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a, b) είναι αριθμήσιμη ένωση τέτοιων διαστημάτων[1], άρα τα μέτρα ν και λ ταυτίζονται στα φραγμένα ανοικτά διαστήματα, άρα παντού.

Θεώρημα 3.7 (Steinhaus) *Αν $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $\lambda(A) > 0$, το $A - A$ περιέχει μια ανοικτή περιοχή του μηδενός $(-\delta, \delta)$.*

Απόδειξη Επειδή $\lambda(A) > 0$ και το λ είναι κανονικό, υπάρχει συμπαγές $K \subseteq A$ με $\lambda(K) > 0$. Πάλι από την κανονικότητα του λ, υπάρχει V ανοικτό με $K \subseteq V$ και $\lambda(V) < 2\lambda(K)$. Έστω $F = V^c$. Το F είναι κλειστό, το K συμπαγές και $K \cap F = \emptyset$, επομένως η απόστασή τους $\delta \equiv \inf\{|x - y| : x \in K, y \in F\}$ είναι θετική. Επομένως για κάθε $x \in K$ και κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ έχουμε $x + t \in V$. Δηλαδή αν $|t| < \delta$ τότε $(K + t) \subseteq V$, οπότε $K \cup (K + t) \subseteq V$. Αλλά τα σύνολα K και $K + t$ έχουν μη κενή τομή. Γιατί αν ήταν ξένα τότε, εφόσον $\lambda(K + t) = \lambda(K)$ θα είχαμε

$$\lambda(V) \geq \lambda(K \cup (K + t)) = \lambda(K) + \lambda(K + t) = 2\lambda(K)$$

ενώ έχουμε διαλέξει το V ώστε $\lambda(V) < 2\lambda(K)$.

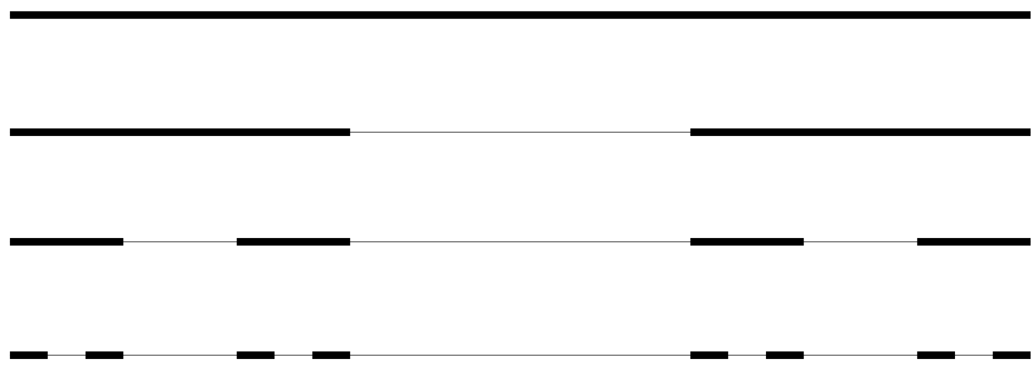
Δείξαμε ότι για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ υπάρχει $x \in K \cap (K + t)$, δηλαδή $x \in K$ και $x = y + t$ για κάποιο $y \in K$. Συνεπώς $t = x - y \in K - K$, άρα $(-\delta, \delta) \subseteq K - K \subseteq A - A$. $\square$

Το σύνολο Cantor Έστω

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\
C_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C &= \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.
\end{aligned}$$

[1] Υπάρχουν γνησίως μονότονες ακολουθίες δυαδικών ρητών (p_n) και (q_n) ώστε $p_n \searrow a$ και $q_n \nearrow b$, οπότε $(a, b) = \cup_n [p_n, q_n)$ και κάθε διάστημα $[p_n, q_n)$ είναι της μορφής $[\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^m}) = [\frac{2^m p}{2^{n+m}}, \frac{2^n q}{2^{n+m}})$, είναι δηλαδή πεπερασμένη ένωση διαστημάτων της μορφής $D(n + m, k)$.

Δηλαδή στο n-οστό στάδιο έχουμε ένα σύνολο C_n που είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων και αφαιρούμε από κάθε κλειστό διάστημα I του C_n το ανοικτό διάστημα με κέντρο το μέσο του I και μήκος ίσο με $1/3$ του μήκος του I.



Παρατήρηση 3.8 *Το σύνολο Cantor έχει μέτρο Lebesgue μηδέν και είναι κλειστό και πουθενά πυκνό. Είναι όμως υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη (α) Κάθε C_n είναι ένωση 2^n ξένων κλειστών διαστημάτων με μήκος $(\frac{1}{3})^n$ το καθένα, άρα $\lambda(C_n) = 2^n(\frac{1}{3})^n$. Έπεται ότι $\lambda(C) \leq \lambda(C_n)$ για κάθε n και άρα το C είναι μηδενικό σύνολο.

(β) Το C είναι κλειστό και πουθενά πυκνό:

Αν I είναι ανοικτό διάστημα που περιέχεται στο C, θα πρέπει να περιέχεται σε κάθε C_n, επομένως σε κάποιο από τα ξένα διαστήματα που απαρτίζουν το C_n. Εφόσον λοιπόν καθένα από τα διαστήματα αυτά έχει μήκος $(\frac{1}{3})^n$, έχουμε $\lambda(I) \leq (\frac{1}{3})^n$ για κάθε n, άρα $\lambda(I) = 0$ και συνεπώς $I = \emptyset$.

(γ) Τέλος, για να δείξουμε ότι το C είναι υπεραριθμήσιμο, θα κατασκευάσουμε μια 1-1 συνάρτηση που απεικονίζει το σύνολο

$$\Omega = \{(\sigma_n) : \sigma_n \in \{0,1\}\}$$

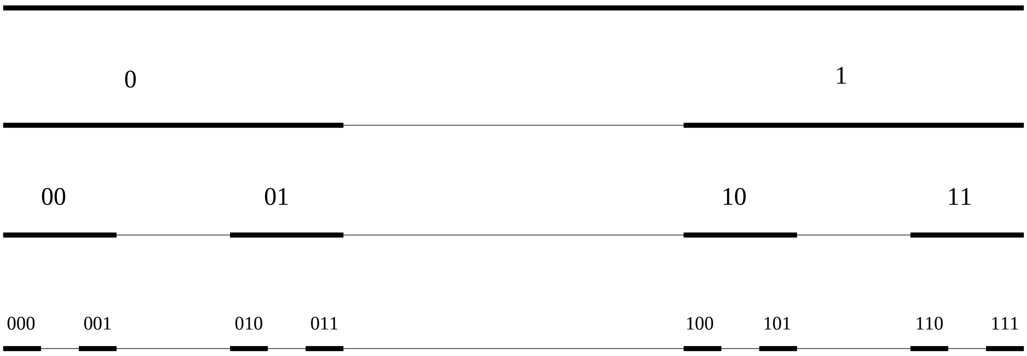
επί του C. Αυτό αρκεί, αφού το Ω είναι υπεραριθμήσιμο.

Δίνουμε διαδοχικά δείκτες στα κλειστά διαστήματα του κάθε C_n ως εξής:

C_1 : $\quad [0, \frac{1}{3}] = K(0), \qquad [\frac{2}{3}, 1] = K(1)$

C_2 : $\quad [0, \frac{1}{9}] = K(00),\ [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] = K(01), \quad [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] = K(10),\ [\frac{8}{9}, 1] = K(11)$

$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$



δηλαδή τα διαστήματα του C_n ονομάζονται $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ όπου $\sigma_k \in \{0, 1\}$ με τέτοιο τρόπο ώστε από το $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ να προκύπτουν στο $n+1$-οστό στάδιο τα διαστήματα $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, 0)$ και $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, 1)$. Επομένως, κάθε άπειρη ακολουθία $\sigma \in \Omega$ καθορίζει μια μοναδική φθίνουσα ακολουθία $K(\sigma_1), K(\sigma_1, \sigma_2), \ldots, K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \ldots$ από συμπαγή διαστήματα. Έπεται (λόγω συμπάγειας) ότι η τομή $K_\sigma \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ δεν είναι κενή, και εφόσον $\mathrm{diam} K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \dfrac{1}{3^n} \to 0$, το K_σ είναι μονοσύνολο. Ονομάζουμε $f(\sigma)$ το μοναδικό στοιχείο του K_σ, δηλαδή $K_\sigma = \{f(c)\}$.

Δεν είναι δύσκολο να βεβαιωθεί κανείς ότι η $\sigma \to f(\sigma)$ είναι 1-1 και επί:

Αν $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots) \neq \tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots)$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sigma_n \neq \tau_n$ οπότε τα σύνολα $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ και $K(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ είναι ξένα. Αλλά $f(\sigma) \in K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ και $f(\tau) \in K(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ άρα $f(\sigma) \neq f(\tau)$.

Επίσης αν $x \in C = \cap_n C_n$ τότε για κάθε n το x ανήκει σε ένα και μοναδικό $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Άρα το x ανήκει στην τομή $\bigcap_n K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = K_\sigma = \{f(\sigma)\}$ οπότε υπάρχει $\sigma \in \Omega$ ώστε $x = f(\sigma)$.

Παρατήρηση 3.9 *Το σύνολο Cantor είναι τέλειο, δηλαδή είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.*

Απόδειξη Βεβαίως το $C = \cap_n C_n$ είναι κλειστό, γιατί κάθε C_n είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων, άρα κλειστό σύνολο.

Θα δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι όριο μιας ακολουθίας (x_n) σημείων του C δαφορετικών από το x.

Για κάθε n, το σημείο x περιέχεται σε ένα μοναδικό $K(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, που το συμβολίζουμε $K_x(n)$.
Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: ή το x είναι το αριστερό άκρο κάποιου $K_x(n_0)$ ή το x δεν είναι το αριστερό άκρο κανενός $K_x(n)$.

Στην πρώτη περίπτωση, το x δεν είναι το δεξιό άκρο κανενός $K_x(n)$, οπότε για κάθε n ονομάζουμε x_n αυτό το δεξιό άκρο. Τότε $0 < |x - x_n| \leq (\frac{1}{3})^n$. Στην δεύτερη περίπτωση, για κάθε n ονομάζουμε x_n το αριστερό άκρο του $K_x(n)$ και πάλι έχουμε $0 < |x - x_n| \leq (\frac{1}{3})^n$. Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_n \to x$. $\square$

Παρατήρηση 3.10 *Για κάθε $a \in (0,1)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο «τύπου Cantor» C^a με μέτρο a.*

Κατασκευή Ξεκινάμε από το $C_0 = [0,1]$, αλλά αντί να αφαιρέσουμε ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{1}{3}$ με κέντρο το μέσον του, αφαιρούμε ένα ανοικτό διάστημα $(\frac{1}{2} - \frac{b}{4}, \frac{1}{2} + \frac{b}{4})$ μήκους $\frac{b}{2}$ (όπου $b = 1 - a$). Προκύπτουν δύο κλειστά διαστήματα μήκους $\frac{1}{2}(1 - \frac{b}{2})$. Από το καθένα αφαιρούμε ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{b}{8}$ με κέντρο το μέσον του, και προκύπτουν τέσσερα διαστήματα μήκους $\frac{1}{4}(1 - \frac{b}{2} - \frac{b}{4})$ το καθένα, και ούτω καθεξής. Έτσι στο n-οστό στάδιο αφαιρούμε, με κέντρο το μέσον κάθε διαστήματος του C^a_{n-1}, ένα ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{b}{2^{2n-1}}$. Έπεται ότι

$$\lambda([0,1] \setminus C^a) = \frac{b}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{8} + \ldots = b, \text{ άρα } \lambda(C^a) = a.$$

Επίσης, επειδή $\lambda(C^a_n) < 1$, καθένα από τα 2^n κλειστά διαστήματα που αποτελούν το C^a_n έχει μήκος μικρότερο από $\frac{1}{2^n}$. Άρα το C^a δεν μπορεί να περιέχει ανοικτά διαστήματα.

Θεώρημα 3.11 (Vitali) *Υπάρχει $E \subseteq [0,1]$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Ένα δεύτερο παράδειγμα Έστω $S^1 = \{e^{i2\pi t} : t \in [0,1)\}$ η μοναδιαία περιφέρεια στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε $e^{i2\pi t} \sim e^{i2\pi s}$ αν $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi q}$ για κάποιο $q \in \mathbb{Q}$. Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, και άρα διαμερίζει την S^1 σε κλάσεις ισοδυναμίας. Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής, επιλέγουμε έναν αντιπρόσωπο $e^{i2\pi t}$ από κάθε κλάση ισοδυναμίας, και ονομάζουμε $F \subseteq S^1$ το σύνολο όλων αυτών των αντιπροσώπων. Θα δείξουμε ότι το F δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο, οπότε και το σύνολο $E = \{t \in [0,1) : e^{i2\pi t} \in F\}$ δεν θα είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Αν $q_1 \neq q_2$ είναι ρητοί στο $[0,1)$, τα σύνολα $e^{i2\pi q_1}F = \{e^{i2\pi(q_1+t)} : e^{i2\pi t} \in F\}$ και $e^{i2\pi q_2}F$ είναι ξένα γιατί αν $e^{i2\pi(q_1+t)} = e^{i2\pi(q_2+s)}$ τότε $e^{i2\pi(t-s)} = e^{i2\pi(q_2-q_1)}$, οπότε τα $e^{i2\pi t}$ και $e^{i2\pi s}$ θα ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, αντίθετα με την επιλογή του F. Αν $\{q_1, q_2, \ldots\}$ είναι μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1)$, τότε

$$S^1 = \bigcup_n e^{i2\pi q_n} F$$

γιατί κάθε $e^{i2\pi t} \in S^1$ ανήκει σε κάποια κλάση ισοδυναμίας, οπότε είναι ισοδύναμο με κάποιο $e^{i2\pi s} \in F$. Εφόσον τα σύνολα $e^{i2\pi q_n}F$ είναι ξένα, αν το F ήταν Lebesgue μετρήσιμο θα είχαμε

$$\lambda(S^1) = \sum_n \lambda(e^{i2\pi q_n} F).$$

Αλλά $\lambda(e^{i2\pi q_n}F) = \lambda(F)$ για κάθε n, αφού το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις. Αν $\lambda(F) = 0$ προκύπτει $\lambda(S^1) = 0$, και αν $\lambda(F) > 0$ προκύπτει $\lambda(S^1) = \infty \cdot$ και οι δύο εκδοχές οδηγούν σε άτοπο.

Πρόταση 3.12 *Έστω X μετρικός χώρος και μ πεπερασμένο μέτρο Borel στον X. Για κάθε A στην πλήρωση $\mathcal{B}(X)_\mu$ της σ-άλγεβρας $\mathcal{B}(X)$ των υποσυνόλων Borel του X ισχύει*

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(A) &= \inf\{\mu(G) : G \text{ ανοικτό, } A \subseteq G\} \\ &= \sup\{\mu(F) : G \text{ κλειστό, } F \subseteq A\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Πόρισμα 3.13 *Αν X συμπαγής μετρικός χώρος, κάθε πεπερασμένο μέτρο Borel στον X είναι κανονικό.*

(Το συμπέρασμα του Πορίσματος ισχύει και αν ο X είναι πλήρης μετρικός διαχωρίσιμος χώρος.)