Θεωρία Μέτρου: Ασκήσεις 3

Άσκηση 3.1 (K:4-6) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $|t| < \delta$ ισχύει $a + t \in A$ ή $a - t \in A$, να αποδειχθεί ότι $\lambda^*(A) \geq \delta$.

Άσκηση 3.2 (K:4-7) Αν $C \subseteq [0, 1]$ είναι το σύνολο Cantor, να αποδειχθεί ότι $C - C = [-1, 1]$ παρόλο που $\lambda(C) = 0$ (συνεπώς το αντίστροφο του Θεωρήματος Steinhaus δεν ισχύει).

Άσκηση 3.3 (K:4-16) Έστω X μετρικός χώρος και μ, ν δύο πεπερασμένα μέτρα Borel στον X.

(ι) Αν τα μ και ν ταυτίζονται στα ανοικτά σύνολα τότε είναι ίσα.

(ιι) Αν τα μ και ν ταυτίζονται στα κλειστά σύνολα τότε είναι ίσα.

(ιιι) Αν τα μ και ν ταυτίζονται στα συμπαγή σύνολα και επιπλέον υπάρχουν $K_n \subseteq X$ συμπαγή ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ τότε τα μ και ν είναι ίσα.

Άσκηση 3.4 (K:4-17) Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\mu \neq 0$ μέτρο Borel στον X.

(α) Για κάθε οικογένεια $\{V_i : i \in I\}$ από ανοικτά σύνολα μέτρου μηδέν ισχύει $\mu(\bigcup_{i \in I} V_i) = 0$.

(β) Αν για κάθε σύνολο Borel B με $\mu(B) > 0$ ισχύει $\mu(B) = 1$, τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $\mu = \delta_x$.

(γ) Αν το μ είναι συνεχές μέτρο (δηλ $\mu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in X$), τότε το μ είναι μη ατομικό (δηλαδή κάθε σύνολο $A \subseteq X$ θετικού μέτρου έχει ένα υποσύνολο με (γνησίως) μικρότερο θετικό μέτρο: δεν υπάρχουν «άτομα»).

Άσκηση 3.5 (K:4-2) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο τότε

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές, πουθενά πυκνό, } K \subseteq A\}.$$

Άσκηση 3.6 (K:4-20) Αποδείξτε ότι υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό μη κενό να ισχύει $\lambda(A \cap G) > 0$ και ταυτόχρονα $\lambda(A^c \cap G) > 0$. Μάλιστα το A μπορεί να επιλεγεί αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συμπαγών υποσυνόλων.