4 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Συμβολισμός: αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ και $b \in \overline{\mathbb{R}}$, γράφουμε

$$[f \leq b] \equiv \{x \in X : f(x) \leq b\} = f^{-1}([-\infty, b])$$

Ορισμός 4.1 *Αν $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται $\mathcal{A}$-**μετρήσιμη** αν για κάθε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει $[f \leq b] \in \mathcal{A}$.*

*Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται μ-**μετρήσιμη** αν είναι $\mathcal{A}_\mu$-μετρήσιμη*[1].

Ειδικότερα, μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμη αν είναι $\mathcal{M}_{\lambda^*}$-μετρήσιμη.

*Αν X μετρικός χώρος, μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **Borel μετρήσιμη** ή απλώς **Borel** αν για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το $[f \leq b]$ είναι Borel στον X.*

Πρόταση 4.1 *Αν $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *f μετρήσιμη*

(β) *για κάθε $b \in \mathbb{R}$, $[f < b] = f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{A}$*

(γ) *για κάθε $b \in \mathbb{R}$, $[b \leq f] = f^{-1}([b, \infty]) \in \mathcal{A}$*

(δ) *για κάθε $b \in \mathbb{R}$, $[b < f] = f^{-1}((b, \infty]) \in \mathcal{A}$*

Παρατηρήσεις 4.2

(α) *Αν X μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε η f είναι Borel.*

(β) *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα τότε είναι Borel.*

(γ) *Ένα σύνολο $A \subseteq X$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ αν και μόνον αν η χαρακτηριστική του συνάρτηση χ_A είναι μετρήσιμη.*

(δ) *Αν μια συνάρτηση είναι Borel μετρήσιμη τότε είναι Lebesgue μετρήσιμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει: παράδειγμα η χ_A όπου $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \setminus \mathcal{B}$.*

Ορισμός 4.2 *Αν $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $C \subseteq X$, μια $f : C \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **μετρήσιμη** αν για κάθε $b \in \mathbb{R}$ ισχύει $[f \leq b] \in \mathcal{A}_c$ όπου $\mathcal{A}_c = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$.*

Πρόταση 4.3 *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Αν $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη τότε για κάθε $C \subseteq X$ η $f|_C$ είναι μετρήσιμη.*

[1] δηλ. αν για κάθε $b \in \mathbb{R}$ υπάρχουν $E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq [f \leq b] \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$.

Πρόταση 4.4 *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $C_n \in \mathcal{A}$ με $\cup_n C_n = X$. Μια συνάρτηση $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν όλες οι $f|_{C_n}$ είναι μετρήσιμες.*

Πρόταση 4.5 *Έστω X μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$. Τότε*
(ι) $\mathcal{B}(X)_Y = \mathcal{B}(Y)$.
(ιι) Αν η $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι Borel τότε και η $f|_Y$ είναι Borel.

Πρόταση 4.6 *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) *f μετρήσιμη*
(β) *για κάθε $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, το $f^{-1}(G)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$*
(γ) *για κάθε $F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό, το $f^{-1}(F)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$*
(δ) *για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel, το $f^{-1}(B)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.*

Πρόταση 4.7 *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες. Τότε*

$$[f < g] \in \mathcal{A} \quad [f \leq g] \in \mathcal{A} \quad [f = g] \in \mathcal{A}$$

Πρόταση 4.8 *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και οι f, g ορίζονται από τις σχέσεις $f(x) = \sup_n f_n(x)$ και $g(x) = \inf_n f_n(x)$ για κάθε $x \in X$ τότε οι f και g είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη (ι) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, αν $f(x) > a$ τότε υπάρχει n ώστε $f_n(x) > a$ και αντίστροφα, δηλαδή

$$\begin{aligned}\{x \in X : f(x) > a\} &\subseteq \{x \in X : \exists n : \ f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) > a\} \\ &\subseteq \{x \in X : f(x) > a\}\end{aligned}$$

άρα ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : f(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) > a\}$$

και συνεπώς η f είναι μετρήσιμη.

(ιι) Ομοίως για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$\{x \in X : g(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in X : f_n(x) < a\},$$

συνεπώς η g είναι μετρήσιμη.

Ορισμός 4.3 *Αν* $: X \to \overline{\mathbb{R}}$, *θέτουμε*

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad (x \in X)$$
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in X).$$

Πόρισμα 4.9 *Έστω* $(X, \mathcal{A})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *μετρήσιμες. Τότε οι συναρτήσεις*

$$f \vee g,\ f \wedge g,\ f^+ = f \vee 0,\ f^- = (-f) \vee 0$$

είναι μετρήσιμες.

Υπενθύμιση: Άνω και κάτω όρια Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ για κάθε n. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Παρατηρούμε ότι (ι) $b_n \geq a_n$ για κάθε n.
(ιι) Η (b_n) είναι φθίνουσα.

Επομένως το όριο $\lim_n b_n$ υπάρχει και ισούται με το $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός 4.4 *Το* ***άνω όριο (limes superior)*** *της* (a_n) *είναι το όριο της* (b_n)*:*

$$\limsup_n a_n = \overline{\lim}_n a_n = \lim_n b_n = \lim_n(\sup\{a_k : k \geq n\}) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ανάλογα, το ***κάτω όριο (limes inferior)*** *της* (a_n) *είναι:*

$$\liminf_n a_n = \underline{\lim}_n a_n = \lim_n(\inf\{a_k : k \geq n\}) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Πρόταση 4.10 ***(α)*** $\inf_n a_n \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq \sup_n a_n$.
(β) *Η ακολουθία* (a_n) *έχει όριο (στο* $\overline{\mathbb{R}}$*) αν και μόνον αν* $\liminf_n a_n = \limsup_n a_n$*, και τότε* $\lim_n a_n = \limsup_n a_n$.

Πρόταση 4.11 *Αν* (f_n) *είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων* $X \to \overline{\mathbb{R}}$*, τότε οι συναρτήσεις* $\limsup_n f_n$ *και* $\liminf_n f_n$ *είναι μετρήσιμες.*
[Θέτουμε $\limsup f_n = \lim g_n$ *όπου* $g_n = \sup_{m \geq n} f_m$*].*

Πρόταση 4.12 *Αν* (f_n) *είναι ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων* $X \to \overline{\mathbb{R}}$ *και αν το όριο* $f(x) = \lim_n f_n(x)$ *υπάρχει (στο* $\overline{\mathbb{R}}$*) για κάθε* $x \in X$ *τότε η* f *είναι μετρήσιμη.*

Ορισμός 4.5 *Μια συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **απλή** αν το σύνολο $s(X)$ είναι πεπερασμένο.*
*Μια απλή συνάρτηση γράφεται σε **κανονική μορφή:** Αν $s(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και $A_i = s^{-1}(\{a_i\})$ τότε η $\{A_1, \ldots A_n\}$ είναι διαμέριση του X και*

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}.$$

Παρατηρήσεις 4.13 *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος.*
(ι) *Μια απλή συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ σε κανονική μορφή $s = \sum_k c_k \chi_{E_k}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $E_k \in \mathcal{A}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.*
(ιι) *Επομένως αν οι $s, t : X \to \mathbb{R}$ είναι απλές μετρήσιμες, το ίδιο ισχύει και για τις*

$$s + t,\ s \cdot t,\ s \vee t,\ s \wedge t,\ s^+,\ s^-,\ |s| = s^+ + s_-.$$

[Απόδειξη: Άσκηση.]

Θεώρημα 4.14 *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών με $s_n(X) \subseteq [0, +\infty)$ για κάθε n τέτοια ώστε*

$$s_n(x) \nearrow f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Αν η f είναι φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις s_n ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X.

Η ιδέα της απόδειξης: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτω

$$F_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

Χωρίζω το $[0, n)$ σε $n \cdot 2^n$ διαστήματα $[0, \frac{1}{2^n}), [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \ldots, [\frac{n2^n-1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n})$ και θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

Ορίζω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}. \qquad \square$$

Πρόταση 4.15 *Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση* $f : X \to [0, +\infty]$ *υπάρχει ακολουθία* (s_n) *απλών μετρησίμων συναρτήσεων ώστε* $0 \le s_n(x) \le s_{n+1}(x) \le f(x)$ *και* $s_n(x) \to f(x)$ *για κάθε* $x \in X$. *Αν η* f *είναι φραγμένη, μπορούμε να διαλέξουμε τις* s_n *ώστε* $s_n \to f$ ομοιόμορφα *στο* X.

Θεώρημα 4.16 *Μια συνάρτηση* $f :\to \overline{\mathbb{R}}$ *είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν είναι το όριο μιας ακολουθίας*[2] *(πραγματικών) μετρήσιμων απλών συναρτήσεων.*

Συμπέρασμα Η κλάση των μετρησίμων συναρτήσεων περιέχει τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις χ_A, $A \in \mathcal{A}$ και είναι κλειστή ως προς τις αλγεβρικές πράξεις:

$$f, g \text{ μετρήσιμες} \quad \Rightarrow \quad f+g,\ f \cdot g,\ f \vee g,\ f \wedge g,\ |f|,\ f^+,\ f^- \text{ μετρήσιμες}$$

καθώς και τα κατά σημείο όρια ακολουθιών

$$f_n \, (n \in \mathbb{N}) \text{ μετρήσιμες} \quad \Rightarrow \quad \sup_n f_n,\ \inf_n f_n,\ \lim_n f_n \text{ μετρήσιμες}$$

(αν το τελευταίο όριο υπάρχει).

Η ιδιάζουσα συνάρτηση του Lebesgue Θα ορίσουμε μια συνάρτηση $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ αύξουσα, συνεχή και επί, που είναι τοπικά σταθερή στο συμπλήρωμα $C^c = [0, 1] \setminus C$ του συνόλου Cantor C.

Κατασκευή Η ϕ θα ορισθεί πρώτα στο C^c. Στο πρώτο στάδιο από το $C_0 = [0, 1]$ αφαιρούμε το «μεσαίο τρίτο» ανοικτό διάστημα: $C_0 \setminus C_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Στο διάστημα αυτό ορίζουμε την ϕ να είναι σταθερά ίση με $\frac{1}{2}$.

$$\phi(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Στο δεύτερο στάδιο αφαιρούμε από καθένα από τα δύο διαστήματα του C_1 το «μεσαίο τρίτο» διάστημα: το σύνολο $C_1 \setminus C_2 = I_1^2 \cup I_2^2$, είναι ένωση δύο ξένων ανοικτών διαστημάτων πλάτους $\frac{1}{9}$ το καθένα: $I_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Θέτουμε

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & t \in I_1^2 \\ \frac{3}{4}, & t \in I_2^2 \end{cases}$$

Στο n-οστό στάδιο, αφαιρούμε από καθένα από τα διαστήματα του C_{n-1} το «μεσαίο τρίτο» διάστημα: το σύνολο $C_{n-1} \setminus C_n$ είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανοικτών

[2] όχι κατ'ανάγκην μονότονης

διαστημάτων. Τα αριθμούμε $I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{2^{n-1}}^n$ από τα αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή αν $t \in I_{k-1}^n$ και $s \in I_k^n$ τότε $t < s$. Θέτουμε

$$\phi(t) = \frac{2i-1}{2^n} \ \text{ όταν } \ t \in I_i^n,$$

δηλαδή

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & t \in I_1^n \\ \frac{3}{2^n}, & t \in I_2^n \\ & \vdots \\ 1 - \frac{1}{2^n}, & t \in I_{2^{n-1}}^n \end{cases}$$

Έτσι ορίζεται η ϕ στο ανοικτό σύνολο C^c.

Για να ορίσουμε την ϕ στο $[0,1]$, θέτουμε $\phi(0) = 0$ και για κάθε $t \in C \setminus \{0\}$,

$$\phi(t) = \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t\}.$$

Ισχυρισμός 1: Η ϕ είναι αύξουσα. Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

$$(a) \qquad s_1, s_2 \in C^c, \quad s_1 < s_2 \Rightarrow \phi(s_1) \leq \phi(s_2).$$

Αυτό είναι φανερό από τον ορισμό της ϕ στο C^c: διότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $j, k = 1, \ldots, 2^{n-1}$ ώστε $s_1 \in I_j^n$ και $s_2 \in I_k^n$, άρα $\phi(s_1) = \frac{2j-1}{2^n}$ και $\phi(s_2) = \frac{2k-1}{2^n}$. Αλλά $j \leq k$ αφού $s_1 < s_2$, άρα $\phi(s_1) \leq \phi(s_2)$.

$$(b) \qquad t_1, t_2 \in C, \quad t_1 < t_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2)$$

διότι $\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \subseteq \{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\}$, άρα
$\sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \leq \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\}$.

$$(c) \qquad t_1 \in C, s_2 \in C^c, \quad t_1 < s_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(s_2)$$

διότι για κάθε $s \in C^c$ με $s < t_1$ έχουμε $s < s_2$ άρα $\phi(s) \leq \phi(s_2)$ από το (a), άρα $\phi(t_1) = \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_1\} \leq \phi(s_2)$.

$$(d) \qquad s_1 \in C^c, t_2 \in C, \quad s_1 < t_2 \Rightarrow \phi(s_1) \leq \phi(t_2)$$

διότι $s_1 \in \{s \in C^c : s < t_2\}$ άρα $\phi(t_2) = \sup\{\phi(s) : s \in C^c, s < t_2\} \geq \phi(s_1)$.

Παρατήρηση Το σύνολο $\phi(C^c) = \{\frac{2i-1}{2^n} : i = 1, \ldots 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ περιέχει όλους τους δυαδικούς ρητούς, άρα είναι πυκνό στο $[0,1]$.

Ισχυρισμός 2: Η ϕ είναι συνεχής:

Έστω ότι η ϕ είναι ασυνεχής σε κάποιο $x \in (0,1)$. Επειδή η ϕ είναι αύξουσα, τα πλευρικά όρια υπάρχουν, και αφού είναι ασυνεχής, είναι διαφορετικά: $\phi(x_-) < \phi(x_+)$. Δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(\phi(x_-), \phi(x_+))$ δεν είναι κενό, και δεν μπορεί να περιέχει καμμιά τιμή της ϕ, εκτός πιθανώς από την τιμή $\phi(x)$. Επομένως υπάρχει κάποιο ανοικτό μη κενό σύνολο που δεν τέμνει το $\phi([0,1])$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την Παρατήρηση.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η ϕ είναι συνεχής στα σημεία 0 και 1.

Ισχυρισμός 3: Η ϕ είναι επί:

Αυτό είναι τώρα άμεσο από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, αφού η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παίρνει της τιμές 0 (εξ ορισμού) και 1 (διότι $\phi(1) = \sup\{\frac{2i-1}{2^n} : i = 1, \dots 2^n, n \in \mathbb{N}\} = 1$).

Η δεξιά αντίστροφη της ϕ: Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \psi &: [0,1] \to [0,1] \\ \psi(s) &= \inf\{t \in [0,1] : \phi(t) = s\} = \inf \phi^{-1}(\{s\}). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αφού η ϕ είναι επί, για κάθε $s \in [0,1]$ το σύνολο $\phi^{-1}(\{s\}) \subseteq [0,1]$ δεν είναι κενό, άρα $\psi(s) \in [0,1]$. Επίσης αφού η ϕ είναι συνεχής, το $\phi^{-1}(\{s\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$, άρα συμπαγές, και συνεπώς το infimum του είναι minimum. Αφού λοιπόν $\psi(s) \in \{t \in [0,1] : \phi(t) = s\}$, έπεται ότι

$$\phi(\psi(s)) = s \qquad \text{για κάθε } s \in [0,1].$$

Ισχυρισμός 4: Η ψ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1:

Θα δείξω ότι

$$s_1 < s_2 \implies \psi(s_1) < \psi(s_2).$$

Πράγματι αν $\psi(s_1) \geq \psi(s_2)$, τότε, αφού η ϕ είναι αύξουσα, έχουμε $\phi(\psi((s_1)) \geq \phi(\psi(s_2))$ δηλαδή $s_1 \geq s_2$.

Ισχυρισμός 5: $\psi([0,1]) \subseteq C$.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $s \in [0,1]$ ώστε $\psi(s) \in C^c$, τότε το $\psi(s)$ θα περιέχεται σε κάποιο ανοικτό διάστημα I_i^n. Επειδή το I_i^n είναι ανοικτό, περιέχει κάποιο $t < \psi(s)$. Ομως, η ϕ είναι σταθερή στο I_i^n, οπότε $\phi(t) = \phi(\psi(s)) = s$. Αλλά από τον ορισμό του, το $\psi(s)$ είναι το μικρότερο από όλα τα t που ικανοποιούν $\phi(t) = s$, άτοπο.

Πρόταση 4.17 *Υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel μετρήσιμα: Αν το $A \subseteq [0,1]$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε το σύνολο $B = \psi(A)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, αλλά δεν είναι Borel μετρήσιμο.*