5 Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε όλη την παράγραφο, σταθεροποιούμε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Ορισμός 5.1 (**i**) *Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ είναι **απλή μετρήσιμη** σε κανονική μορφή $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$ ορίζουμε*

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k) \in [0, +\infty]$$

(θέτουμε $0 \cdot (+\infty) = 0$)
(**ii**) *Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι **μετρήσιμη**, ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, 0 \le s \le f \right\}.$$

Αν $A \in \mathcal{S}$ ορίζουμε

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

(**iii**) *Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη και $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$. Τότε οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f^+ d\mu$ και $\int f^- d\mu$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(**iv**) *Μια $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **(απολύτως) ολοκληρώσιμη** αν είναι **μετρήσιμη** και*

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τις ιδιότητες του ολοκληρώματος μη αρνητικών συναρτήσεων.

Λήμμα 5.1 *Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ απλή μετρήσιμη και $s = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$ όπου $B_k \cap B_j = \emptyset$ για $k \neq j$, τότε*

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(B_k).$$

Πρόταση 5.2 *Αν $s, t : X \to [0, +\infty)$ απλές μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε*

$$\textbf{(i)} \quad \int as d\mu = a \int s d\mu$$

$$\textbf{(ii)} \quad \int (s+t) d\mu = \int s d\mu + \int t d\mu$$

$$\textbf{(iii)} \quad \text{Αν} \quad s \leq t \quad \text{τότε} \quad \int s d\mu \leq \int t d\mu.$$

Πρόταση 5.3 *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε*

$$\textbf{(i)} \quad \int af d\mu = a \int f d\mu$$

$$\textbf{(ii)} \quad \text{Αν} \quad f \leq g \quad \text{τότε} \quad \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

$$\textbf{(iii)} \quad \text{Αν} \quad A \subseteq B \ (A, B \in S) \quad \text{τότε} \quad \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

$$\textbf{(iv)} \quad \text{Αν} \quad A \in S \text{ και } \mu(A) = 0 \text{ ή } f|_A = 0 \quad \text{τότε} \quad \int_A f d\mu = 0.$$

Πρόταση 5.4 *Έστω $s : X \to [0, +\infty)$ απλή μετρήσιμη. Ορίζουμε*

$$\nu : \mathcal{S} \to [0, +\infty] : \nu(A) = \int_A s d\mu.$$

Τότε το ν είναι μέτρο.

Θεώρημα 5.5 (Μονότονης σύγκλισης του Lebesgue) *Αν (f_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρησίμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$, τότε*

$$\int (\lim_n f_n) d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι αύξουσα και συνεπώς έχει όριο $f(x) \in [0, +\infty]$. Έχουμε δείξει ότι το κατά σημείο όριο μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη. Άρα η f είναι μετρήσιμη, και συνεπώς το $\int f d\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$). Επειδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, έχουμε $\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$. Επομένως το όριο $a \equiv \lim_n \int f_n d\mu$ υπάρχει (μπορεί να είναι $+\infty$) και

$$a \leq \int f d\mu.$$

Μένει να δειχθεί η αντίστροφη ανισότητα. Από τον ορισμό του $\int f d\mu$ αρκεί να δείξουμε ότι αν s είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \leq s \leq f$ ισχύει

$$\int s d\mu \leq a.$$

Σταθεροποιούμε ένα $c \in (0, 1)$ και θα δείξουμε ότι

$$c \int s d\mu \leq a.$$

Θέτουμε

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Παρατηρούμε ότι $E_n \in \mathcal{S}$ αφού η $f_n - cs$ είναι μετρήσιμη και $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ αφού $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$.

Ισχυρισμός:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X.$$

Πράγματι, έστω $x \in X$. Αν $f(x) = 0$ τότε $s(x) = 0$ άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Αν πάλι $f(x) > 0$ τότε $f(x) \geq s(x) > cs(x)$, οπότε εφόσον $f_n(x) \nearrow f(x)$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) \geq cs(x)$, άρα $x \in E_n$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θεωρούμε το μέτρο ν που ορίζεται από τη σχέση

$$\nu(E) = \int_E s d\mu, \quad E \in \mathcal{S}$$

Έχουμε

$$c\nu(E_n) = c \int_{E_n} s d\mu = \int_{E_n} cs d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu.$$

Όταν $n \to \infty$, έχουμε $\nu(E_n) \to \nu(X) = \int s d\mu$ από την σ-προσθετικότητα του ν (Πρόταση 5.4). Επίσης $\int f_n d\mu \to a$.

Συνεπώς $c \int s d\mu \leq a$. Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $c \in (0, 1)$, θεωρώντας $c \nearrow 1$ προκύπτει

$$\int s d\mu \leq a$$

για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$, και συνεπώς

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη}, \ 0 \leq s \leq f \right\} \leq a$$

άρα τελικώς $\int f d\mu = a$. $\square$

Πόρισμα 5.6 *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Θεώρημα 5.7 (Beppo Levi) *Αν (f_n) είναι ακολουθία μετρησίμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$, τότε*

$$\int \left(\sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \left(\int f_n d\mu \right).$$

Πρόταση 5.8 (Λήμμα Fatou) *Αν $f_n : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμες*[1]

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Πρόταση 5.9 *Έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη. Ορίζουμε*

$$\nu = \nu_{f,\mu} : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$$
$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

(ι) *Το ν είναι μέτρο.*
(ιι) *Αν $A \in \mathcal{S}$ τότε $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.*
(ιιι) *Αν $g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, τότε*

$$\int g d\nu = \int g f d\mu \quad \textit{και}$$
$$\nu_{fg,\mu} = \nu_{g,\nu_{f,\mu}} = \nu_{f,\nu_{g,\mu}}.$$

Ορισμός 5.2 *Μια ιδιότητα P σημείων του X ισχύει μ-**σχεδόν παντού** αν το σύνολο $\{x \in X : \eta\ P(x) \text{ δεν ισχύει}\}$ είναι μ-μηδενικό, δηλαδή υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ με $\mu(A) = 0$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus A$ η $P(x)$ να ισχύει.*

Για παράδειγμα αν $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$, η σχέση $f \leq g$ μ-σχεδόν παντού σημαίνει ότι το σύνολο $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$ είναι μηδενικό, δηλαδή ότι υπάρχει $A \in \mathcal{S}$ με $\mu(A) = 0$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus A$ να ισχύει $f(x) \leq g(x)$.

[1] Υπενθύμιση: $\liminf_n f_n = \lim_n (\inf\{f_k : k \geq n\})$.

Πρόταση 5.10 *Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ είναι $\mu-$μετρήσιμη (δηλ. $[f \le b] \in \mathcal{S}_\mu$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$) τότε:*

(ι) *Κάθε g που είναι μ-σχεδόν παντού ίση με την f είναι $\mu-$μετρήσιμη.*

(ιι) *Υπάρχει $h : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη (δηλ. $[h \le b] \in \mathcal{S}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$) ώστε $h = f$ σχεδόν παντού.*

Πόρισμα 5.11 *Κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ είναι λ-σχεδόν παντού ίση με μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση.*

Πρόταση 5.12 *Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμες τότε*

(ι) *$f = g$ σχεδόν παντού $\Longrightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$*

(ιι) *$f = 0$ σχεδόν παντού $\iff \int f d\mu = 0$.*

Ορισμός 5.3 *Μια $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **ολοκληρώσιμη** αν είναι **μετρήσιμη** και*

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ ολοκληρώσιμη}\}$$

Παρατήρηση 5.13 *Αν $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f = f^+ - f^-$, τότε επειδή $0 \le f^\pm \le |f|$ έχουμε $f^\pm \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Αν αντίστροφα οι f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες τότε αφού $|f| = f^+ + f^-$ έχουμε $\int |f| d\mu < +\infty$ άρα $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu), \quad f = f^+ - f^- : \qquad \int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Θεώρημα 5.14 *Ο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμική απεικόνιση $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$. Δηλαδή*

$$\begin{aligned} &\text{αν } f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu), \text{και } \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε } f + \lambda g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{και } \int (f + \lambda g) d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu. \end{aligned}$$

Απόδειξη (ι) Επειδή $|f + \lambda g| \le |f| + |\lambda||g|$, έχουμε

$$\int |f + \lambda g| d\mu \le \int (|f| + |\lambda||g|) d\mu = \int |f| d\mu + |\lambda| \int |g| d\mu < +\infty.$$

(ια) Αν $h = f + g$ τότε

$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$

$\Rightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$

$$\Rightarrow \int (h^+ + f^- + g^-)d\mu = \int (f^+ + g^+ + h^-)d\mu \qquad \text{(όλες μη αρνητικές)}$$

$$\Rightarrow \int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu \qquad \text{(Πόρισμα 5.6)}$$

$$\Rightarrow \int h d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

(ιβ) Αν $\lambda \geq 0$ τότε $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ και $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ άρα

$$\int \lambda f d\mu = \int (\lambda f)^+ d\mu - \int (\lambda f^-) d\mu = \int \lambda f^+ d\mu - \int \lambda f^- d\mu$$
$$\overset{(5.3)}{=} \lambda \int f^+ d\mu - \lambda \int f^- d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

(ιγ) $(-f)^+ = f^-$ και $(-f)^- = f^+$ άρα

$$\int (-f) d\mu = \int (-f)^+ d\mu - \int (-f^-) d\mu = \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu$$
$$= -\left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right) = -\int f d\mu.$$

Πρόταση 5.15 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ τότε*

$$(i) \qquad f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

$$(ii) \qquad \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Απόδειξη (ι) Εξ ορισμού αν $h \geq 0$ μετρήσιμη τότε $\int h d\mu \geq 0$. Επομένως $\int (g - f) d\mu \geq 0$. Αλλά $\int (g - f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu$.

(ιι) Έχουμε

$$- |f| \leq f \leq |f|$$
$$\Longrightarrow \int (-|f|) d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu$$
$$\Longrightarrow -\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu$$
$$\Longrightarrow \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Πρόταση 5.16 *Έστω $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.*

(ι) *Αν $f = g$ μ-σ.π. τότε $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

(ιι) *$f = 0$ μ-σ.π. αν και μόνον αν $\int_A f d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$.*

Απόδειξη (ι) Αν $f = g$ μ-σ.π. τότε $|f-g| = 0$ μ-σ.π. οπότε $\int |f-g| d\mu = 0$, άρα

$$0 \leq \left| \int f d\mu - \int g d\mu \right| = \left| \int (f-g) d\mu \right| \leq \int |f-g| d\mu = 0.$$

(ιι) Αν $\int_A f d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{S}$, τότε θέτοντας $A^+ = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ και $A^- = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$, οπότε $A^\pm \in \mathcal{S}$, έχουμε $f^\pm = f\chi_{A^\pm}$, άρα

$$\int f^\pm d\mu = \int f\chi_{A^\pm} d\mu = \int_{A^\pm} f d\mu = 0$$

άρα, αφου $f^\pm \geq 0$ και $\int f^\pm d\mu = 0$, έχουμε $f^\pm = 0$ μ-σ.π. άρα $f = 0$ μ-σ.π.

Πόρισμα 5.17 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f \leq g$ μ-σ.π. τότε $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

Απόδειξη Αν $B = [f > g]$ τότε $B \in \mathcal{S}$ και $\mu(B) = 0$. Αν $f_1 = f\chi_{B^c}$ και $g_1 = g\chi_{B^c}$ τότε $|f_1| \leq |f|$ και $|g_1| \leq |g|$ άρα $f_1, g_1 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $f_1 \leq g_1$ παντού άρα $\int f_1 d\mu \leq \int g_1 d\mu$. Αλλά $f = f_1$ και $g = g_1$ μ-σ.π. άρα $\int f d\mu = \int f_1 d\mu$ και $\int g d\mu = \int g_1 d\mu$.

Θεώρημα 5.18 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης) *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει για κάθε $x \in X$ και έστω $f(x) = \lim_n f_n(x)$.*

Αν υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε[2] $|f_n| \leq g$ για κάθε n, τότε $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Απόδειξη Η f είναι μετρήσιμη διότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη. Εφόσον $|f_n| \leq g$ και $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, έχουμε $\int |f_n| d\mu \leq \int g d\mu < +\infty$ άρα $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Για τον ίδιο λόγο (εφόσον $|f| = \lim_n |f_n| \leq g$) έχουμε επίσης $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Επομένως

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu$$

[2]υπενθυμίζουμε ότι η υπόθεση $|f_n| \leq g$ δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα 5.14 και η δεύτερη ανισότητα από την Πρόταση 5.15.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Θέτουμε $h_n = |f_n - f|$ και παρατηρούμε ότι $0 \leq h_n \leq 2g$ και ότι $h_n(x) \to 0$ για κάθε x. Άρα $2g - h_n \geq 0$ και $2g - h_n \to 2g$ κατά σημείο. Από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf_n (2g - h_n) d\mu \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int 2g d\mu &= \int \liminf_n (2g - h_n) d\mu \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu \\ &= \int 2g d\mu + \liminf_n \int (-h_n) d\mu = \int 2g d\mu - \limsup_n \int h_n d\mu \end{aligned}$$

άρα $\limsup_n \int h_n d\mu \leq 0$. Αλλά $\int h_n d\mu \geq 0$ άρα $\liminf_n \int h_n d\mu \geq 0$ επομένως

$$0 \leq \liminf_n \int h_n d\mu \leq \limsup_n \int h_n d\mu \leq 0$$

δηλαδή το όριο $\lim_n \int h_n d\mu$ υπάρχει και είναι 0. $\square$

Παρατήρηση 5.19 *Τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων Κυριαρχημένης Σύγκλισης και Μονότονης Σύγκλισης εξακολουθούν να ισχύουν αν οι υποθέσεις τους ικανοποιούνται μ-σχεδόν σε όλα τα σημεία του X.*

Για παράδειγμα, έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ και υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ μ-σχεδόν παντού. Αν ορίσουμε $f(x) = \lim_n f_n(x)$ στα σημεία $x \in X$ όπου το όριο υπάρχει και $f(x) = 0$ στα υπόλοιπα σημεία του χώρου, τότε η f είναι μετρήσιμη, ανήκει στον $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και ισχύει $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.