6 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

6.1 Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$$

σε ξένα ανά δύο διαστήματα $I_k = [t_{k-1}, t_k)$, $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ και $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ θέτουμε

$$\begin{aligned} M_i &= M_i(f) = \sup\{f(s) : s \in I_i\} \\ m_i &= m_i(f) = \inf\{f(s) : s \in I_i\} \qquad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} L(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \\ U(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Τα $L(f, \mathcal{P})$ και $U(f, \mathcal{P})$ ονομάζονται **το κάτω και άνω άθροισμα Riemann** της f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Είναι σαφές ότι $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P})$. Θεωρώντας διαδοχικά διαμερίσεις με όλο και περισσότερα σημεία, θα παρατηρήσουμε ότι τα κάτω αθροίσματα μεγαλώνουν, παραμένοντας όμως όλα μικρότερα (ή ίσα) από κάθε άνω άθροισμα, ενώ τα άνω αθροίσματα μικραίνουν, παραμένοντας όμως όλα μεγαλύτερα (ή ίσα) από κάθε κάτω άθροισμα. Αν υπάρχει *ένας και μοναδικός* αριθμός I ανάμεσα στα κάτω και τα άνω αθροίσματα, δηλαδή τέτοιος ώστε να ισχύει $L(f, \mathcal{P}) \leq I \leq U(f, \mathcal{Q})$ για οποιεσδήποτε δύο διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ του $[a, b]$, τότε αυτός ο αριθμός ονομάζεται το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$. Αλλιώς, το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$ δεν υπάρχει. Τα αθροίσματα Riemann λοιπόν αποτελούν κάτω και άνω προσεγγίσεις[1] του ολοκληρώματος Riemann, όταν αυτό υπάρχει.

Πρόταση 6.1 (Κριτήριο Riemann) *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon$ του $[a, b]$ ώστε*

$$U(f, \mathcal{P}_\epsilon) - L(f, \mathcal{P}_\epsilon) < \varepsilon. \tag{1}$$

[1] Μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι, είτε υπολογίσει τα άνω και κάτω αθροίσματα χρησιμοποιώντας ημι-άνοιχτα διαστήματα (όπως εδώ) είτε τα υπολογίσει χρησιμοποιώντας κλειστά διαστήματα, η ύπαρξη και η τιμή του ολοκληρώματος της f δεν επηρεάζονται.

Ισοδύναμα:

Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a,b]$ ορίζουμε **κλιμακωτές** συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$, $g_{\mathcal{P}}$ ως εξής: κάθε $t \in [a,b]$ ανήκει ακριβώς σε ένα από τα I_i και θέτουμε

$$h_{\mathcal{P}}(t) = m_i(f), \quad g_{\mathcal{P}}(t) = M_i(f), \quad t \in I_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

δηλαδή

$$h_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\chi_{I_i}, \quad g_{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\chi_{I_i}$$

όπου $\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$ η **χαρακτηριστική συνάρτηση** του συνόλου A. Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$h_{\mathcal{P}}(t) \leq f(t) \leq g_p(t) \quad \text{για κάθε} \ \ t \in [a,b]$$
$$\text{και} \quad \int_a^b h_{\mathcal{P}}(t)dt = L(f,\mathcal{P}), \quad \int_a^b g_{\mathcal{P}}(t)dt = U(f,\mathcal{P}).$$

Επομένως το κριτήριο Riemann αναδιατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση 6.2 *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις $g_\epsilon, h_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $g_\epsilon \leq f \leq h_\epsilon$ και $\int_a^b (h_\epsilon - g_\epsilon) < \epsilon$.*

6.2 Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση ανάμεσα στο ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Επειδή οι συναρτήσεις $h_{\mathcal{P}}$ και $g_{\mathcal{P}}$ είναι κλιμακωτές (άρα απλές μετρήσιμες), το ολοκλήρωμα Riemann και το ολοκλήρωμα Lebesgue των συναρτήσεων αυτών συμπίπτουν.

Επιλέγουμε επαγωγικά διαμερίσεις $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \ldots \subseteq P_n \subseteq \ldots$ ώστε η «λεπτότητα» (δηλαδή η απόσταση δύο διαδοχικών σημείων) της P_n να είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_{\mathcal{P}_n} = \sup_{\mathcal{P}} L(f,\mathcal{P}) \equiv \underline{\int_a^b} f, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_{\mathcal{P}_n} = \inf_{\mathcal{P}} U(f,\mathcal{P}) \equiv \overline{\int_a^b} f.$$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(h_{\mathcal{P}_n}) = (h_n)$ είναι αύξουσα και η $(g_{\mathcal{P}_n}) = (g_n)$ είναι φθίνουσα και ότι $h_n \leq f \leq g_n$ για κάθε n. Θέτουμε $h = \sup_n h_n$ και $g = \inf_n g_n$. Οι h, g είναι μετρήσιμες και

$$h \leq f \leq g.$$

Χωρίς καμμιά υπόθεση για την f (εκτός του ότι είναι φραγμένη) από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int h d\lambda = \lim_n \int h_n d\lambda = \underline{\int_a^b} f \quad \text{και} \quad \int g d\lambda = \lim_n \int g_n d\lambda = \overline{\int_a^b} f.$$

Επομένως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα

$$\int h d\lambda = \int g d\lambda.$$

Εφόσον $h \leq g$, η ισότητα αυτή ισχύει αν και μόνον αν $h(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$.

Τότε έχουμε και $h(x) = f(x) = g(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [a, b]$ οπότε η f είναι μετρήσιμη[2], μάλιστα Lebesgue-ολοκληρώσιμη και

$$\int f d\lambda = \int h d\lambda = \underline{\int_a^b} f$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα Lebesgue της f συμπίπτει με το ολοκλήρωμα Riemann.

Ισχυρισμός 6.3 *Έστω $x \in [a, b]$ που δεν ανήκει σε κανένα από τα διαχωριστικά σημεία καμμιάς από τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$. Τότε η f είναι συνεχής στο x αν και μόνον αν $h(x) = f(x) = g(x)$.*

Απόδειξη Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $t \in [a, b]$ και $|t - x| < \delta$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \epsilon$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \delta$, οπότε η λεπτότητα της διαμέρισης $\mathcal{P}_n$ είναι μικρότερη από δ. Έπεται ότι αν I_k είναι το διάστημα της $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε κάθε $t \in I_k$ θα ικανοποιεί $|t - x| < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ και συνεπώς $|M_k(f) - f(x)| \leq \epsilon$

[2] για κάθε $c \in \mathbb{R}$, το σύνολο $\{x \in [a, b] : f(x) < c\}$ διαφέρει από το σύνολο $\{x \in [a, b] : h(x) < c\}$ κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν, άρα είναι μετρήσιμο, γιατί τα σύνολα μέτρου μηδέν είναι Lebesgue μετρήσιμα.

και $|m_k(f) - f(x)| \leq \epsilon$ άρα $|M_k(f) - m_k(f)| \leq 2\epsilon$, οπότε $g_n(x) - h_n(x) \leq 2\epsilon$. Αλλά $0 \leq g(x) - h(x) \leq g_n(x) - h_n(x) \leq 2\epsilon$, πράγμα που σημαίνει (αφού το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο) ότι $g(x) - h(x) = 0$.

Αν αντίστροφα $g(x) - h(x) = 0$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq g_n(x) - h_n(x) < \epsilon$ οπότε, αν $I_k = [t_{k-1}, t_k)$ είναι το διάστημα της $\mathcal{P}_n$ όπου ανήκει το x, τότε για κάθε $t \in I_k$ έχουμε $m_k(f) \leq f(t) \leq M_k(f)$ και $m_k(f) \leq f(x) \leq M_k(f)$ άρα

$$|f(t) - f(x)| \leq M_k(f) - m_k(f) = g_n(x) - h_n(x) < \epsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό διάστημα (t_{k-1}, t_k) ώστε για κάθε $t \in (t_{k-1}, t_k)$ να ισχύει $|f(t) - f(x)| < \epsilon$, που σημαίνει ότ η f είναι συνεχής στο x. $\square$

Επομένως, αν υπάρχει ένα σύνολο $N_1 \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε $h(x) = f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a, b] \setminus N_1$ και αν ονομάσουμε N την ένωση του N_1 με το (αριθμήσιμο) σύνολο όλων των σημείων όλων των διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε το N έχει μέτρο μηδέν και η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N$, δηλαδή σχεδόν παντού. Αν αντίστροφα η f είναι συνεχής σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $N_2 \subseteq [a, b]$ μέτρου μηδέν ώστε η f να είναι συνεχής σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N_2$, τότε η ισότητα $h(x) = f(x) = g(x)$ ισχύει σε κάθε $x \in [a, b] \setminus N_2$ που δεν είναι σημείο καμμιάς από τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$, δηλαδή σχεδόν παντού. Έπεται τότε ότι $\int h d\lambda = \int g d\lambda$, και συνεπώς το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$ υπάρχει.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 6.4 *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.*

Παρατήρηση 6.5 *Ας τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην έννοια «σχεδόν παντού συνεχής» και «σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση»:*

Για παράδειγμα η συνάρτηση Dirichlet, δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών, δεν είναι πουθενά συνεχής, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$. Αντίθετα η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ είναι σχεδόν παντού συνεχής (αφού είναι ασυνεχής μόνο στα σημεία $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$), αλλά δεν μπορεί να είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση, γιατί έχει άλμα στα δύο αυτά σημεία.