Θεωρία Μέτρου: Ασκήσεις 5

Άσκηση 5.1 (KN:–) Αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση, είναι αλήθεια ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) ώστε $f_n(x) \to f(x)$ λ-σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$; (βλ. και Άσκ. 4.7)

Άσκηση 5.2 (KN:–) Ορίζουμε $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 0$ για κάθε x στο σύνολο Cantor C και $f(x) = k$ για κάθε x σε κάθε διάστημα μήκους 3^{-k} του C^c. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη και υπολογίστε το $\int f d\lambda$.

Άσκηση 5.3 (KN:6-1) Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ ώστε $\int f d\mu < \infty$, τότε για κάθε $a \in (0, \infty]$ ισχύει $\mu([f \geq a]) < \infty$.

Άσκηση 5.4 (KN:6-10) Έστω $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $A \in \mathcal{S}$ και $\mu(A) < \delta$ να ισχύει $\int_A f d\mu < \epsilon$.

Άσκηση 5.5 (KN:6-15) Έστω $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Αποδείξτε ότι $\int |f_n - f| d\mu \to 0$ αν και μόνον αν $\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$ *ομοιόμορφα* ως προς $A \in \mathcal{S}$. (**!**)

Άσκηση 5.6 (KN:6-18) Αν $a_{nk} \in \mathbb{R}$ και $\sum_n (\sum_k |a_{nk}|) < \infty$ δείξτε ότι οι σειρές $\sum_k a_{nk}$, $\sum_n a_{nk}$ συγκλίνουν και ότι $\sum_n (\sum_k a_{nk}) = \sum_k (\sum_n a_{nk}) \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.7 (KN:6-19) Εξετάστε αν $\lim_n \int f_n d\lambda = \int \lim_n f_n d\lambda$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(i) \quad f_n = \chi_{[0,n]} \qquad (ii) \quad f_n = \tfrac{1}{n}\chi_{[n,\infty)} \quad (iii) \quad f_n = \tfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}$$

$$(iv) \quad f_n = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]} \quad (vi) \quad f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}.$$

Τι παρατηρείτε σχετικά με τα Θεωρήματα μονότονης σύγκλισης, κυριαρχημένης σύγκλισης και το Λήμμα Fatou;

Άσκηση 5.8 (KN:–) (ι) Αν $f(t) = x^{-1/2}$ $(x > 0)$, εξετάστε αν $f \in \mathcal{L}^1([0,1], \lambda)$ και αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$.
(ιι) Αν $f_n(t) = \dfrac{n \sin x}{1 + n^2\sqrt{x}}$ $(x \in [0,1])$, δείξτε ότι $\lim_n \int_0^1 f_n(t) dt = 0$.

Άσκηση 5.9 (KN:–) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \equiv \lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt \right).$$

Δείξτε ότι αν $f \geq 0$, το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει αν και μόνον αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$. Τι μπορούμε να πούμε χωρίς την υπόθεση $f \geq 0$;

Άσκηση 5.10 (KN:–) Αν $f : (0, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ για κάθε $a > 0$, πότε υπάρχει το

$$\int_0^b f(t)dt \equiv \lim_{a \to 0} \int_a^b f(t)dt\,?$$