Άσκηση *Έστω $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Αν $\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο A, είναι αλήθεια ότι $\int |f_n - f| d\mu \to 0$;*

Αυτό που ισχύει γενικά είναι:

$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$ ομοιόμορφα ως προς A αν και μόνον αν $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.

Απόδειξη Αν $\int |f_n - f| d\mu \to 0$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\int |f_n - f| d\mu < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_o$ και συνεπώς

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f_n - f| d\mu \leq \int |f_n - f| d\mu < \epsilon$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε $n \geq n_o$.

Αντίστροφα, έστω $\epsilon > 0$ και $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_o$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ να ισχύει

$$\left| \int_A (f_n - f) d\mu \right| < \epsilon.$$

Τότε, θέτοντας $A_n = [f_n - f \geq 0]$ έχουμε για κάθε $n \geq n_o$

$$\int_{A_n} |f_n - f| d\mu = \int_{A_n} (f_n - f) d\mu < \epsilon$$

και

$$\int_{A_n^c} |f_n - f| d\mu = \int_{A_n^c} (f - f_n) d\mu < \epsilon$$

άρα

$$\int |f_n - f| d\mu = \int_{A_n} |f_n - f| d\mu + \int_{A_n^c} |f_n - f| d\mu < 2\epsilon.$$

Αν η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων δεν είναι ομοιόμορφη ως προς A, δεν ισχύει πάντα ότι $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.

Παράδειγμα Στο $[0,1]$ με το μέτρο Lebesgue λ ορίζουμε, για $n = 0, 1, \ldots$,

$$B_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right),\ B_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right),\ B_2 = \left[0, \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right),$$

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{2^n - 1} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$$

και

$$f_n = \chi_{B_n} - \chi_{B_n^c}.$$

Δηλαδή η f_n παίρνει εναλλάξ τις τιμές $+1$ και -1 στα υποδιαστήματα στα οποία διαρείται το $[0,1]$ στο n-οστό στάδιο. Είναι φανερό ότι οι f_n είναι συναρτήσεις Borel και ότι ανήκουν στον $\mathcal{L}^1$, αφού $|f_n| = 1$ για κάθε n, οπότε $\int |f_n| d\lambda = 1$ για κάθε n. Θα δείξουμε όμως ότι $\int_A f_n d\lambda \to 0$ για κάθε Borel $A \subseteq [0,1]$.

Πράγματι:

(ι) αν ονομάσουμε $\mathbb{D}$ το σύνολο $\{\frac{k}{2^n}, k = 0, 1, \dots, 2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ των δυαδικών ρητών του $[0,1]$, τότε είναι φανερό ότι αν A είναι διάστημα με άκρα $\frac{k}{2^m} < \frac{k+1}{2^m}$, ισχύει ότι $\int_A f_n d\mu = 0$ για κάθε $n > m$, άρα το ίδιο ισχύει αν το A έχει άκρα $\frac{k}{2^m} < \frac{r}{2^m}$.

(ιι) Έστω $\epsilon > 0$ και $A \subseteq [0,1]$ Borel. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχει C ανοικτό με $A \subseteq C \subseteq [0,1]$ και $\lambda(C \cap A^c) < \epsilon$. Επειδή το $\mathbb{D}$ είναι πυκνό στο $[0,1]$, το ανοικτό σύνολο C γράφεται[1] ως αριθμήσιμη ένωση $C = \bigcup_{m=1}^\infty I_m$ ξένων ανά δύο διαστημάτων με άκρα από το $\mathbb{D}$. Επειδή $\lambda(C) = \sum_m \lambda(I_m)$ υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε αν $C' = \bigcup_{m=1}^M I_m$ και $C'' = C \setminus C'$ να ισχύει $\lambda(C'') < \epsilon$. Επειδή το C' είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων με άκρα από το $\mathbb{D}$, από το (ι) υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\int_{C'} f_n d\lambda = 0$ για κάθε $n \geq n_o$. Επομένως

$$0 = \int_{C'} f_n d\lambda = \int_{A \cap C'} f_n d\lambda + \int_{A^c \cap C'} f_n d\lambda$$

άρα, εφόσον $|f_n| = 1$,

$$\left| \int_{A \cap C'} f_n d\lambda \right| = \left| \int_{A^c \cap C'} f_n d\lambda \right| \leq \int_{A^c \cap C'} |f_n| d\lambda = \lambda(A^c \cap C') \leq \lambda(A^c \cap C) < \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_o$. Επίσης

$$\left| \int_{A \cap C''} f_n d\lambda \right| \leq \int_{A \cap C''} |f_n| d\lambda = \lambda(A \cap C'') \leq \lambda(C'') < \epsilon$$

άρα, εφόσον $(A \cap C') \cup (A \cap C'') = A \cap C = A$,

$$\left| \int_A f_n d\lambda \right| = \left| \int_{A \cap C'} f_n d\lambda + \int_{A \cap C''} f_n d\lambda \right| \leq \left| \int_{A \cap C'} f_n d\lambda \right| + \left| \int_{A \cap C''} f_n d\lambda \right| < 2\epsilon$$

για κάθε $n \geq n_o$.

[1] Αν το C είναι διάστημα, $C = (a,b)$, υπάρχουν μια φθίνουσα ακολουθία (a_n) και μια αύξουσα ακολουθία (b_n) με στοιχεία από το $\mathbb{D}$ ώστε $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Έχουμε $(a,b) = \bigcup_n (a_n, b_n)$. Θέτουμε τώρα $J_1 = (a_1, b_1)$, $J_2 = (a_2, b_2) \setminus (a_1, b_1), \dots$, και παρατηρούμε ότι τα J_n είναι ξένα, κάθε ένα είναι ξένη ένωση (δύο) διαστημάτων με άκρα από το $\mathbb{D}$ και $(a,b) = \bigcup_n J_n$. Για τη γενική περίπτωση αρκεί να θυμηθούμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.