7 Σύγκλιση ακολουθιών μετρησίμων και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα μας απασχολήσει κυρίως η σύγκλιση ακολουθιών μετρησίμων συναρτήσεων με διάφορους τρόπους (σχεδόν παντού, σχεδόν ομοιόμορφα, κατά μέτρο, στον χώρο $\mathcal{L}^1(\mu)$,...) αλλά και η προσέγγιση μετρησίμων ή ολοκληρωσίμων συναρτήσεων από «καλύτερες» συναρτήσεις (απλές, κλιμακωτές, συνεχείς, ...).

7.1 Το Θεώρημα του Lusin

Αρχίζουμε με ένα θεώρημα *προσέγγισης* Borel-μετρησίμων συναρτήσεων (σε ένα μετρικό χώρο) από συνεχείς συναρτήσεις: Αν X είναι μετρικός χώρος και μ είναι πεπερασμένο μέτρο Borel στον X, κάθε μ-μετρήσιμη συνάρτηση ταυτίζεται, σε ένα σύνολο μεγάλου μέτρου, με μια συνεχή συνάρτηση:

Θεώρημα 7.1 (Lusin) *Έστω X μετρικός χώρος και μ* πεπερασμένο *μέτρο Borel στον X. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μ-μετρήσιμη, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει (ι) ένα ανοικτό σύνολο $A \subseteq X$ με $\mu(A) < \epsilon$ ώστε η $f|_{A^c}$ να είναι συνεχής στο A^c και (ιι) μια συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ ώστε $\bar{\mu}([f \neq g]) < \varepsilon$. Επιπλέον*

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Απόδειξη Έστω $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με ρητά άκρα[1]. Τότε κάθε $f^{-1}(V_n)$ είναι μ-μετρήσιμο, άρα, όπως έχουμε αποδείξει, υπάρχουν F_n κλειστό και G_n ανοικτό ώστε $F_n \subseteq f^{-1}(V_n) \subseteq G_n$ και $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Θέτουμε[2] $A = \bigcup_n (G_n \setminus F_n)$ και $Y = A^c$. Το Y είναι κλειστό και

$$\mu(A) \leq \sum_n \mu(G_n \setminus F_n) < \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Ισχυρισμός: Η $f|_Y$ είναι συνεχής στον Y. Για να το αποδείξουμε, αρκεί (γιατί;) να δείξουμε ότι κάθε $f^{-1}(V_n) \cap Y$ είναι ανοικτό (στον Y). Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(V_n) \cap Y = Y \cap G_n$.

Πράγματι, αφού $F_n \subseteq f^{-1}(V_n) \subseteq G_n$, έχουμε

$$Y \cap F_n \subseteq Y \cap f^{-1}(V_n) \subseteq Y \cap G_n.$$

[1] ή μια οποιαδήποτε αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R}$

[2] Αναζητούμε ένα κλειστό σύνολο Y ώστε το $f^{-1}(V_n) \cap Y$ να είναι (σχετικά) ανοικτό στο Y). Το Y κατασκευάζεται «πετώντας τα κακά κομμάτια» $G_n \setminus F_n$.

Αλλά $G_n \backslash F_n \subseteq X \backslash Y$ άρα $Y \cap G_n = Y \cap F_n$, οπότε ισχύει ισότητα.

Αποδείχθηκε το (ι). Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα Tietze (βλ. 7.2), επεκτείνουμε την συνεχή συνάρτηση $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ σε μια συνεχή συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με
$\sup\{|g(x)| : x \in X\} = \sup\{|f(y)| : y \in Y\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$,
και παρατηρούμε ότι οι g και f διαφέρουν το πολύ στα σημεία του A, που έχει μέτρο μικρότερο του ε. $\square$.

Λήμμα 7.2 (Θεώρημα Tietze για μετρικούς χώρους) *Αν X είναι μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$ κλειστό, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : Y \to \mathbb{R}$ έχει μια συνεχή επέκταση $g : X \to \mathbb{R}$ και επιπλέον*

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} = \sup\{|f(y)| : x \in Y\}.$$

Στην περίπτωση $X = \mathbb{R}$), η απόδειξη είναι άμεση: Το σύνολο Y^c είναι ανοικτό, άρα είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων: $Y^c = \cup_n (a_n, b_n)$. Επεκτείνουμε την f σε μια συνεχή συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ ορίζοντας την g στο Y^c ώστε σε κάθε (a_n, b_n) το γράφημά της να είναι ευθεία γραμμή:

$$g(x) = \frac{(x - a_n)f(b_n) - (x - b_n)f(a_n)}{b_n - a_n}, \qquad a_n < x < b_n.$$

Παρατήρηση 7.3 *Το συμπέρασμα του Θεωρήματος Lusin ισχύει στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$.*

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν G ανοικτό, F κλειστό, $F \subseteq A \subseteq G$ με $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $I_n = [n, n+1)$ και $A_n = A \cap I_n$. Το μέτρο Lebesgue είναι κανονικό σε κάθε I_n. Υπάρχουν λοιπόν K_n συμπαγές, G_n ανοικτό, $K_n \subseteq A_n \subseteq G_n$ με $\mu(G_n \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Θέτουμε $G = \cup_n G_n$ και $F = \cup_n K_n$. Το μόνο που χρειάζεται απόδειξη είναι ότι το F είναι κλειστό. Και πραγματικά, αν $x_n \in F$ και $x_n \to x$, αφού η (x_n) συγκλίνει θα είναι φραγμένη άρα θα περιέχεται σε κάποιο $[-n_o, n_o]$ και άρα στο $K_{-n_o} \cup K_{-n_o+1} \cup \ldots \cup K_{n_o} \equiv F_o$. Το F_o είναι όμως κλειστό, άρα $x \in F_o \subseteq F$. $\square$

7.2 Σύγκλιση ακολουθιών μετρησίμων συναρτήσεων

Ορισμός 7.1 *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.*

1. *$f_n \to f$ **κατά σημείο στο** X σημαίνει ότι $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall x \in X$ $\exists n_o = n_o(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_o \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

2. $f_n \to f$ ***κατά σημείο*** μ-***σχεδόν παντού*** *σημαίνει ότι υπάρχει* $N \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(N) = 0$ *ώστε* $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X \backslash N$.

3. $f_n \to f$ ***κατά μέτρο*** *σημαίνει ότι* $\forall \varepsilon > 0$ *αν*

$$N(n, \varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

   τότε $\lim_n \mu(N(n, \varepsilon)) = 0$.

4. $f_n \to f$ ***ομοιόμορφα στο*** X *σημαίνει ότι* $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε* $n \geq n_o \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$.

5. $f_n \to f$ ***σχεδόν ομοιόμορφα*** *σημαίνει ότι* $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists M_\varepsilon \in \mathcal{A}$ *με* $\mu(M_\varepsilon) < \varepsilon$ *ώστε* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα στο* $X \backslash M_\varepsilon$.

Παρατήρηση 7.4 *Αν* $\quad X \backslash A = \{x \in X : \lim_n f_n(x) = f(x)\}$ *τότε*

$$A = \bigcup_{\varepsilon > 0} \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \varepsilon) \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \frac{1}{k}) \right).$$

Άρα $A \in \mathcal{A}$. *Έχουμε* $f_n \to f$ *κατά σημείο αν και μόνον αν* $A = \emptyset$ *και* $f_n \to f$ μ-*σχεδόν παντού αν και μόνον αν* $\mu(A) = 0$.

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
f_n(x) \to f(x) \quad &\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : (n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon) \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : (n \geq m \Rightarrow x \in (N(n, \epsilon))^c) \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} (N(n, \epsilon))^c \\
&\iff \forall \epsilon > 0 \quad x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (N(n, \epsilon))^c \\
&\iff \qquad x \in \bigcap_{\epsilon > 0} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (N(n, \epsilon))^c \right)
\end{aligned}$$

$$\text{άρα} \quad A = \bigcup_{\varepsilon > 0} \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \varepsilon) \right).$$

Επειδή όμως

$$f_n(x) \to f(x) \iff \forall k \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} : \left(n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right)$$

έπεται με τον ίδιο συλλογισμό ότι

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \frac{1}{k}) \right).$$

άρα το A είναι μετρήσιμο, αφού προκύπτει από τα μετρήσιμα σύνολα $N(n, \frac{1}{k})$ με αριθμήσιμες ενώσεις και τομές.

Πρόταση 7.5 (Lebesgue) *Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού , τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Από την υπόθεση έχουμε $\mu(A) = 0$, άρα

$$0 = \mu \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \varepsilon) \right) = \lim_m \mu \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \varepsilon) \right) \tag{1}$$

γιατί όταν μια ακολουθία (B_m) είναι φθίνουσα έχουμε $\mu(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m) = \lim_m \mu(B_m)$ (επειδή $\mu(X) < \infty$). Αλλά

$$\mu \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \varepsilon) \right) \geq \mu(N(m, \varepsilon))$$

άρα $\lim_m \mu(N(m, \varepsilon)) = 0$. $\square$

Παραδείγματα 7.6 ***(ι)*** *Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.*
Παράδειγμα: Για κάθε n, έστω K_n το εξής πεπερασμένο κάλυμμα του $[0, 1]$ από διαστήματα μήκους 2^{-n}: $K_1 = \{[0, \frac{1}{2}],][\frac{1}{2}, 1]\}, K_2 = \{[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]\}$ και ούτω καθεξής. Το σύνολο $\cup_n K_n$ είναι αριθμήσιμο. Έστω $I_1, I_2, \dots$ μια αρίθμησή του, και έστω χ_n η χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n. Εφόσον κάθε $x \in [0, 1]$ ανήκει σε άπειρο πλήθος I_n και σε άπειρο πλήθος I_n^c, η ακολουθία $(\chi_n(x))$ δεν μπορεί να συγκλίνει. Από την άλλη όμως, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\lambda(\{[\chi_n \geq \epsilon]\}) \leq \lambda(I_n)$, άρα $\chi_n \to 0$ κατά μέτρο.

(ιι) *Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου. Για παράδειγμα η ακολουθία $(\chi_{[n,\infty)})$ τείνει στο 0 κατά σημείο, ενώ δεν συγκλίνει κατά μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$.*

Θεώρημα 7.7 (Egorov) *Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη Ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 7.5. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, εφαρμόζοντας τη σχέση (1) από την απόδειξη της Πρότασης αυτής για $\varepsilon = \frac{1}{k}$ έχουμε

$$\lim_m \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Επομένως για κάθε $\delta > 0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right) < \frac{\delta}{2^k}.$$

Έστω

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right).$$

Τότε

$$\mu(A_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Ισχυρισμός: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c.

Απόδειξη : Έστω $\epsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{k} < \epsilon$. Επειδή $A_\delta \supseteq \bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})$, αν $x \in A_\delta^c$ έχουμε $x \notin \bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})$ άρα για κάθε $n \geq m_k$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} < \epsilon$. Αφού το m_k δεν εξαρτάται από το x έχουμε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c. $\square$

Το Θεώρημα Egorov δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου. Ένα παράδειγμα είναι το 7.6 (ι): Η ακολουθία (χ_n) τείνει στο μηδέν παντού, αλλά όχι σχεδόν ομοιόμορφα, διότι τότε θα έτεινε στο μηδέν και κατά μέτρο (Πρόταση 7.9).

Πρόταση 7.8 *Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει στην f σχεδόν ομοιόμορφα αν και μόνον αν υπάρχει φθίνουσα ακολουθία (C_k) με $C_k \in \mathcal{A}$ και $\mu(C_k) \to 0$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύει $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο C_k^c.*

Πρόταση 7.9 *Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα τότε $f_n \to f$ σχεδόν παντού και κατά μέτρο.*

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία (g_n) όπου $g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \leq t \leq n + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$.

Παρατήρηση 7.10 *Απο το Θεώρημα 7.7 και την Πρόταση 7.9 έπεται ότι σε χώρους* ***πεπερασμένου*** *μέτρου,*

$$f_n \to f \text{ σ.π.} \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \to f \text{ σχεδόν ομοιόμορφα.}$$

Επομένως, αν $f_n \to f$ σχ. ομοιόμορφα τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα, όπως φαίνεται από το Παράδειγμα 7.6.

Πρόταση 7.11 *Αν (X, d) μετρικός χώρος και μ* πεπερασμένο *μέτρο Borel στον X τότε για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $g_n \to f$ μ-σχεδόν παντού. Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, μπορούμε να επιλέξουμε τις g_n ομοιόμορφα φραγμένες:* $\sup\{|g_n(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Θεώρημα Lusin υπάρχει $g_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχής με $\mu([g_n \neq f]) < \frac{1}{2^n}$ και $\sup\{|g_n(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Για να δείξουμε ότι $g_n \to f$ σ.π. πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο

$$A_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \epsilon)$$

(όπου $N(n, \varepsilon) = [|g_n - f| \geq \varepsilon]$) έχει $\mu(A_\epsilon) = 0$.

Για κάθε m, έχουμε $A_\varepsilon \subseteq \cup_{n \geq m} N(n, \varepsilon)$ άρα $\mu(A_\varepsilon) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(N(n, \varepsilon))$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mu(N(n, \varepsilon)) = 0$. Πράγματι, επειδή

$$\mu(N(n, \varepsilon)) = \mu([|g_n - f| \geq \varepsilon]) \leq \mu([g_n \neq f]) < \frac{1}{2^n}$$

έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(N(n, \varepsilon)) < \infty$, άρα $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mu(N(n, \varepsilon)) = 0$.

Πρόταση 7.12 (ανισότητα Chebyshev - Markov) *Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη και $\epsilon > 0$, τότε*

$$\mu([f \geq \epsilon]) \leq \frac{1}{\epsilon} \int f d\mu.$$

Απόδειξη

$$\int_X f d\mu \geq \int_{[f\geq\epsilon]} f d\mu \geq \int_{[f\geq\epsilon]} \epsilon d\mu = \epsilon\mu([f \geq \epsilon]). \quad \square$$

7.3 Ο χώρος $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$

Ορισμός 7.2 *Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, ο χώρος $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f| d\mu < +\infty$. Ο αριθμός $\int_X |f| d\mu$ συμβολίζεται $\|f\|_1$.*

Παρατήρηση 7.13 ***(ι)*** *Αν η $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι μετρήσιμη τότε $\|f\|_1 < +\infty$ αν και μόνον αν η f παίρνει μ-σ.π. πραγματικές τιμές.*
(ιι) *Αν $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$, το σύνολο $[f \neq 0]$ έχει σ-πεπερασμένο μέτρο*[3].
(ιιι) *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $f + \lambda g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ και*

1. $\|\lambda g\|_1 = |\lambda|\|g\|_1$
2. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
3. $\|f\|_1 = 0$ *αν και μόνον αν* $f = 0$ *μ-σ.π.*

Ορισμός 7.3 *Μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ λέγεται ότι συγκλίνει στην $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$* ***ως προς την*** *$\|.\|_1$ (ή στον L^1) αν $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Γενικότερα, η (f_n) λέγεται* ***βασική ακολουθία ως προς την*** *$\|.\|_1$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ για κάθε $m, n \geq n_o$.*

Παρατήρηση 7.14 *Αν η (f_n) συγκλίνει μ-σ.π., δεν έπεται κατ'ανάγκην ότι συγκλίνει ως προς την $\|.\|_1$.*
Για παράδειγμα έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(1 - nx), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Τότε $f_n \in \mathcal{L}^1([0, 1], \lambda)$ και $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα $f_n \to 0$ λ-σ.π., αλλά $\|f_n\|_1 = \frac{n}{2} \to \infty$.

---

[3]γιατί $[f \neq 0] = \bigcup_n \left[|f| \geq \frac{1}{n}\right]$ και $\mu\left(\left[|f| \geq \frac{1}{n}\right]\right) \leq n \int |f| d\mu < \infty$ (Πρόταση 7.12).

Παρατήρηση 7.15 *Αν η (f_n) συγκλίνει ως προς την $\|.\|_1$, δεν έπεται κατ'ανάγκην ότι συγκλίνει μ-σ.π. Μπορεί μάλιστα να αποκλίνει σε κάθε σημείο. Όπως θα δούμε όμως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.16, η (f_n) έχει πάντα μια* υπακολουθία *που συγκλίνει μ-σ.π.*

Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία (χ_n) από το παράδειγμα 7.6(ι) η οποία δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [0,1]$, ενώ από την άλλη μεριά

$$\|\chi_n\|_1 = \int_0^1 |\chi_n| d\lambda = \lambda(I_n) \to 0$$

εφόσον για κάθε $m \in \mathbb{N}$, μόνον πεπερασμένο πλήθος από τα I_n έχει μήκος μεγαλύτερο από 2^{-m}.

Θεώρημα 7.16 (Riesz-Fischer) *Έστω (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων στον $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ που είναι βασική ως προς την $\|.\|_1$. Τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$ ώστε $f_n \to f$ ως προς την $\|.\|_1$. Μάλιστα η f είναι το όριο μ-σ.π. μιας* υπακολουθίας *της (f_n).*

Απόδειξη (ι) Εφόσον οι διαφορές $\|f_n - f_m\|_1$ «τείνουν στο 0», υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) ώστε $\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < +\infty$. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια υπακολουθία συγκλίνει μ-σ.π. σε μια $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$.

Συγκεκριμένα, επιλέγουμε γνήσια αύξουσα ακολουθία (n_k) ώστε

$$\|f_m - f_n\|_1 < \frac{1}{2^k} \quad (m, n \geq n_k) \tag{2}$$

Για ευκολία θέτουμε $h_k = f_{n_k}$,

$$g_k = |h_1| + |h_2 - h_1| + \ldots + |h_{k+1} - h_k|$$

και

$$g = \sup_k g_k = \lim_k g_k = |h_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k|.$$

Τότε οι h_k, g_k, g είναι μετρήσιμες. Από το Θεώρημα B. Levi,

$$\begin{aligned}\int g d\mu &= \int |h_1| d\mu + \int \sum_{k=1}^{\infty} |h_{k+1} - h_k| d\mu \\ &= \int |h_1| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int |h_{k+1} - h_k| d\mu \leq \int |h_1| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty\end{aligned}$$

άρα η $g(x)$ είναι σ.π. πεπερασμένη (Παρατήρηση 7.13 (ι)). Επομένως αν $A = [g < +\infty]$ τότε $A \in \mathcal{S}$ και $\mu(A^c) = 0$. Για κάθε $x \in A$ η ακολουθία $(g_k(x))$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in A$, η σειρά

$$h_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_{k+1}(x) - h_k(x))$$

συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Αλλά

$$h_{k+1}(x) = h_1(x) + (h_2(x) - h_1(x)) + \ldots + (h_{k+1}(x) - h_k(x)),$$

οπότε θέτοντας $f(x) = \lim_k h_k(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$ για $x \in A$ και $f(x) = 0$ για $x \in A^c$ έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση f στο X. Επίσης,

$$\begin{aligned}\int_X |f| d\mu = \int_X \lim_m |h_{m+1}| d\mu &\leq \int_X \lim_m \left(|h_1| + \sum_{k=1}^{m} |h_{k+1} - h_k| \right) d\mu \\ &= \int_X g d\mu < +\infty\end{aligned}$$

άρα $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{S}, \mu)$.

(ιι) Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι το όριο ως προς την $\|.\|_1$ ολόκληρης της ακολουθίας (f_n).

Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε k_o ώστε $\frac{1}{2^{k_o}} < \varepsilon$ οπότε από την (2) έχουμε

$$\|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon \qquad (m, n \geq n_{k_o}).$$

Συνεπώς αν $k \geq k_o$ και $m \geq n_{k_o}$ τότε $\|f_m - f_{n_k}\|_1 < \varepsilon$ άρα

$$\liminf_k \|f_m - f_{n_k}\|_1 \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε } m \geq n_{k_o}.$$

Επειδή όμως $f = \lim f_{n_k}$ σ.π., άρα $|f - f_m| = \lim_k |f_{n_k} - f_m|$ σ.π. για κάθε $m \geq n_{k_o}$, από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\begin{aligned}\|f - f_m\|_1 &= \int_X |f - f_m| d\mu = \int_X \liminf_k |f_{n_k} - f_m| d\mu \\ &\leq \liminf_k \int_X |f_{n_k} - f_m| d\mu \leq \varepsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

Παρατήρηση 7.17 Η παρατήρηση 7.13 λέει ότι ο $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|.\|_1$ είναι *ημινόρμα* σ'αυτόν. Επομένως η $\|.\|_1$ ορίζει μια νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^1(X,\mathcal{S},\mu)=\mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)/\mathcal{N}$ όπου
$\mathcal{N}=\{f\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu):\|f\|_1=0\}$. Από το (3) της παρατήρησης 7.13 έπεται ότι ο $L^1(X,\mathcal{S},\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ modulo ισότητα μ-σ.π.

Με αυτήν την ορολογία, το Θεώρημα Riesz-Fischer λέει ακριβώς ότι ο χώρος $(L^1(X,\mathcal{S},\mu),\|.\|_1)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach.

Παρατήρηση 7.18 *Στον $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι πυκνό υποσύνολο: για κάθε $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_{\lambda^*},\lambda)$ υπάρχει ακολουθία (f_n) από απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ώστε $\|f-f_n\|_1\to 0$.*

Απόδειξη Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες απλών μετρήσιμων συναρτήσεων (s_n) και (t_n) ώστε $s_n\nearrow f^+$ και $t_n\nearrow f^-$. Αν $f_n=s_n-t_n$ έχουμε
$f_n\to f^+-f^-=f$ κατά σημείο και

$$|f_n|=|s_n-t_n|\le|s_n|+|t_n|\le f^++f^-=|f|.$$

Αφού η $|f|$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1$, έχουμε $f_n\in\mathcal{L}^1$ και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι $\|f_n-f\|_1=\int|f_n-f|d\mu\to 0$.

Πρόταση 7.19 *Στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_{\lambda^*},\lambda)$ οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνό υποσύνολο: για κάθε $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_{\lambda^*},\lambda)$ υπάρχει ακολουθία (f_n) από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα ώστε $\|f-f_n\|_1\to 0$.*

Απόδειξη Αν $f\in\mathcal{L}^1$ και $\chi_n=\chi_{[-n,n]}$, τότε $f\chi_n\to f$ στον $\mathcal{L}^1$ (Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης). Επομένως, αν $\epsilon>0$ υπάρχει συμπαγές διάστημα I ώστε $\int|f-f\chi_I|d\lambda<\epsilon$. Από την Πρόταση 7.11 βρίσκω συνεχείς g_n ώστε $g_n\to f\chi_I$ σχεδόν παντού στο I και επίσης $|g_n|\le|f\chi_I|$, άρα $g_n\to f\chi_I$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι $g_n\to f\chi_I$ στον $\mathcal{L}^1$, δηλαδή υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ ώστε $\int|f\chi_I-g_n|d\lambda<\epsilon$ για κάθε $n\ge n_o$ και συνεπώς

$$\int|f-g_n|d\lambda\le\int|f-f\chi_I|d\lambda+\int|f\chi_I-g_n|d\lambda<2\epsilon$$

για κάθε $n\ge n_o$.

Πρόταση 7.20 *Η σύγκλιση στον L^1 συνεπάγεται την σύγκλιση κατά μέτρο.*

Απόδειξη Αν $f_n \to f$ στον L^1, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$, αν $N(n,\epsilon) = [|f_n - f| \geq \epsilon]$ έχουμε από την Πρόταση 7.12

$$\mu(N(n,\epsilon)) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{N(n,\epsilon)} |f_n - f| d\mu \leq \frac{1}{\epsilon}\|f_n - f\|_1 \to 0.$$

Παραδείγματα 7.21 *Το αντίστροφο δεν ισχύει χωρίς επιπλέον υποθέσεις (βλ. Πρόταση 7.22), ούτε σε χώρους πεπερασμένου μέτρου.*

Για παράδειγμα, στον $([0,1], \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$ αν $f_n = n^2\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ έχουμε $N(n,\epsilon) \subseteq [0,\frac{1}{n}]$ για κάθε $\epsilon > 0$ άρα $f_n \to 0$ κατά μέτρο, ενώ $\|f_n\|_1 = n \to \infty$.
Στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$, η ακολουθία (f_n) όπου $f_n(t) = \dfrac{n}{t^2}\chi_{[n,\infty)}(t)$ ικανοποιεί $f_n \to 0$ ομοιόμορφα (και άρα κατά μέτρο) αλλά $\displaystyle\int f_n d\lambda = \int_n^\infty \frac{n}{t^2}dt = 1$ για κάθε n.

Πρόταση 7.22 *Έστω f_n, f μετρήσιμες συναρτήσεις και $g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{S},\mu)$ μετρήσιμη συνάρτηση με $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
(ι) Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού, τότε $f \in \mathcal{L}^1$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$.
(ιι) Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε $f \in \mathcal{L}^1$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Απόδειξη (ι) Αφού $|f_n| \leq g$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού, έχουμε $|f| \leq g$ σχεδόν παντού (άρα $f \in \mathcal{L}^1$) και συνεπώς $|f_n - f| \leq 2g$ σχεδόν παντού. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι, εφόσον $|f_n - f| \to 0$ σχεδόν παντού, έχουμε $\int |f_n - f| d\mu \to 0$.

(ιι) Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Θα υπάρχει τότε $\epsilon > 0$ και υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) ώστε

$$\int |f_{k_n} - f| d\mu \geq \epsilon \qquad \text{για κάθε } n. \tag{3}$$

Γράφουμε $h_n = |f_{k_n} - f|$ για ευκολία. Εφόσον $h_n \to 0$ κατά μέτρο από την υπόθεση, αν $N(n,\epsilon) = [h_n \geq \epsilon]$ έχουμε για κάθε $\epsilon > 0$ ότι $\mu(N(n,\epsilon)) \to 0$ και άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(N(n_m, \frac{1}{2^m})) \leq \frac{1}{2^m}$.

Θέτοντας τώρα $A = \displaystyle\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{m\geq k} N(n_m, \frac{1}{2^m})$ βρίσκουμε ότι $\mu(A) \leq \displaystyle\sum_{m\geq k}\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{k-1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\mu(A) = 0$. Επίσης για κάθε $x \notin A$ έχουμε $|h_{n_m}(x)| < \frac{1}{2^m}$. Έχουμε δηλαδή $f_{k_{n_m}} \to f$ σχεδόν παντού, άρα $|f| \leq g$ σχεδόν παντού. Από το (ι) έπεται τώρα ότι $f \in \mathcal{L}^1$ και $\int |f_{k_{n_m}} - f| d\mu \to 0$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την (3).