Προσέγγιση με απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Έχουμε δείξει ότι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$. Θα δείξουμε ότι ότι ο «πολύ μικρότερος» χώρος των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα έχει την ίδια ιδιότητα.

Πρόταση 1 *Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ απεριόριστα παραγωγίσιμη με συμπαγή φορέα. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα, η συνάρτηση g όπου*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)\phi(s)ds$$

είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και έχει συμπαγή φορέα[1] *και*

$$\text{supp } g \subseteq \text{supp } f + \text{supp } \phi.$$

Απόδειξη Αν $x \notin \text{supp } f + \text{supp } \phi$, τότε για κάθε $s \in \text{supp } \phi$ έχουμε $x - s \notin \text{supp } f$ άρα $g(x) = 0$. Επομένως η g έχει συμπαγή φορέα:

$$\text{supp } g \subseteq \text{supp } f + \text{supp } \phi.$$

Σταθεροποιώ $x \in \mathbb{R}$ και θα δείξω ότι η $g'(x)$ υπάρχει.

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\phi(y)dy \\ g(x+h) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-(y-h))\phi(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\phi(t+h)dt \\ \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h}dt \end{aligned}$$

Ισχυρισμός: Αν $h_n \to 0$ τότε

$$\psi_n(t) \equiv \frac{\phi(t+h_n)-\phi(t)}{h_n} \to \phi'(t)$$

ομοιόμορφα ως προς t και υπάρχει συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\text{supp } \psi_n \subseteq K$ για κάθε n.

[1] Ο *φορέας* supp g μιας συνάρτησης g είναι εξ ορισμού το σύνολο $\overline{\{x : g(x) \neq 0\}}$

Πράγματι, αν supp $\phi \subseteq [a,b]$ και $|h_n| \le c$ για κάθε n τότε supp $\psi_n \subseteq [a-c, b+c]$ για κάθε n. Συνεπώς supp $\phi' \subseteq [a-c, b+c]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε n υπάρχει t_n μεταξύ των t και $t+h_n$ ώστε

$$\phi(t+h_n) - \phi(t) = \phi'(t_n)h_n \quad \text{άρα} \quad \psi_n(t) - \phi(t) = \phi'(t_n) - \phi(t).$$

Επειδή η ϕ' είναι ομοιόμορφα συνεχής (διότι είναι συνεχής με συμπαγή φορέα) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x-y| < \delta$ να έχομε $|\phi'(y) - \phi'(x)| < \epsilon$. Τώρα αν $|h_n| < \delta$ έχουμε $|t_n - t| < \delta$ οπότε $|\psi_n(t) - \phi(t)| < \epsilon$.

Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έπεται ότι για κάθε x έχουμε $f(x-t)\psi_n(t) \to f(x-t)\phi'(t)$ ομοιόμορφα ως προς t και συνεπώς, αφού οι ψ_n και ϕ φέρονται σε ένα συμπαγές,

$$\int f(x-t)\psi_n(t)dt \to \int f(x-t)\phi'(t)dt.$$

άρα

$$\frac{g(x+h_n) - g(x)}{h_n} \to \int f(x-t)\phi'(t)dt.$$

Εφόσον η (h_n) είναι τυχαία μηδενική ακολουθία, δείξαμε ότι για κάθε x η $g'(x)$ υπάρχει και

$$g'(x) = \int f(x-t)\phi'(t)dt.$$

Επαγωγικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $g^{(n)}$ υπάρχει και

$$g^{(n)}(x) = \int f(x-t)\phi^{(n)}(t)dt.$$

Πρόταση 2 *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με συμπαγή φορέα, υπάρχει ακολουθία (f_m) από απεριόριστα παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα* supp $f_m \subseteq$ supp $f + [-1,1]$, *ώστε $f_m \to f$* ομοιόμορφα, *και άρα*

$$\int |f_m - f| d\lambda \to 0.$$

Απόδειξη Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη με supp$\phi \subseteq [-1,1]$, και $\int_{-1}^{1} \phi d\lambda = 1$, θέτουμε

$$\phi_m(x) = m\phi(mx)$$

$$\text{και} \qquad f_m(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\phi_m(t)dt.$$

Τότε η f_m είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και $\mathrm{supp}\, f_m \subseteq \mathrm{supp}\, f + [-1,1]$ από την προηγούμενη Πρόταση. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_m(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\phi_m(t)dt - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\phi_m(t)dt - f(x)\int_{\mathbb{R}} \phi_m(t)dt \qquad (\text{διότι} \quad \int_{\mathbb{R}} \phi_m(t)dt = 1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\phi_m(t)dt. \end{aligned}$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ να ισχύει *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ η ανισότητα $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$. Επειδή $\mathrm{supp}\phi_m \subseteq [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \delta$ έχω $\phi_m(t)$ όταν $|t| > \delta$, οπότε

$$f_m(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\phi_m(t)dt = \int_{[-\delta,\delta]} (f(x-t) - f(x))\phi_m(t)dt.$$

Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε, αν $\frac{1}{m} < \delta$,

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \int_{[-\delta,\delta]} |f(x-t) - f(x)|\phi_m(t)dt \leq \varepsilon \int \phi_m(t)dt = \varepsilon.$$

Παράδειγμα 3 *Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις απαιτήσεις των προηγουμένων είναι η*

$$\phi(x) = \begin{cases} c\exp\frac{-1}{1-x^2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

όπου $\frac{1}{c} = \int_{-1}^{1} \exp\frac{-1}{1-x^2}dx.$

Απόδειξη Πρέπει να δείξουμε ότι στα σημεία $-1, +1$, όλες οι παράγωγοι $\phi^{(n)}$ υπάρχουν και είναι 0. Παρατηρούμε ότι αν $|x| < 1$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |x-1|(1-x^2)^m \exp\frac{1}{1-x^2} &= |1-x|^{m+1}|1+x|^m \exp\frac{1}{|1-x|.|1+x|} \\ &\geq |1-x|^{m+1}|1+x|^m \frac{1}{(m+2)!}\frac{1}{|1-x|^{m+2}|1+x|^{m+2}} \\ &= \frac{1}{(m+2)!}\frac{1}{|1-x|.|1+x|^2} \end{aligned}$$

Επομένως $0 \leq \dfrac{1}{|x-1|(1-x^2)^m} \exp \dfrac{-1}{1-x^2} \leq (m+2)!|1-x|.|1+x|^2$

$$\text{άρα} \qquad \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{(x-1)(1-x^2)^m} \exp \frac{-1}{1-x^2} = 0 \tag{1}$$

Αν $|x| < 1$ έχουμε

$$\phi'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} c \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)$$

$$\text{Επαγωγικά,} \quad \phi^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} \phi(x)$$

όπου p_n πολυώνυμο[2]. Απο την (1)

$$\phi'(1) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1}(\phi(x) - \phi(0)) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} \phi(x) = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η $\phi^{(n)}(1)$ υπάρχει και είναι 0,

$$\phi^{(n+1)}(1) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1}(\phi^{(n)}(x) - \phi^{(n)}(1)) = \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{x-1} \frac{p_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} \phi(x) = 0$$

με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\phi^{(n+1)}(-1)$ υπάρχει και είναι 0.

---

[2]

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= p(x)(x^2-1)^{-2n} y \\
y^{(n+1)} &= p(x)(x^2-1)^{-2n} y' + p'(x)(x^2-1)^{-2n} y - 2np(x)(x^2-1)^{-2n-1} 2xy \\
&= p(x)(x^2-1)^{-2n-2}(-2x)y + p'(x)(x^2-1)^{-2n} y - 2np(x)(x^2-1)^{-2n-1} 2xy \\
&= [-2xp(x) + p'(x)(x^2-1)^2 - 4nxp(x)(x^2-1)](x^2-1)^{-2n-2} y
\end{aligned}$$