Θεωρία Μέτρου: Ασκήσεις 7

Άσκηση 7.1 (KN:8-1) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και f_n, f μετρήσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_n \mu(A_n^\epsilon) = 0 \quad \text{όπου} \quad A_n^\epsilon = \{x \in X : \sup\{|f_m(x) - f(x)| : m \geq n\} \geq \epsilon\}.$$

Άσκηση 7.2 (KN:8-2) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και f_n, f μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν για κάθε $\epsilon > 0$ η σειρά $\sum_n \mu([|f_n - f| \geq \epsilon])$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού.

Άσκηση 7.3 (KN:8-3) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Egorov δώστε μια άλλη απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης σε χώρους πεπερασμένου μέτρου. [Υπόδειξη: Άσκηση 5.4]

Άσκηση 7.4 (KN:8-5) Έστω $(X, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και μ το αριθμητικό μέτρο στην $\mathcal{S}$. Πότε μια ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων συγκλίνει κατά μέτρο;

Άσκηση 7.5 (KN:8-9) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου, f_n, f, g_n, g μετρήσιμες συναρτήσεις και $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέτρο, αποδείξτε ότι $f_n + \lambda g_n \to f + \lambda g$ κατά μέτρο.

Άσκηση 7.6 (KN:8-10) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου, f_n, f πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ κατά μέτρο.

Άσκηση 7.7 (KN:8-11) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και f_n, f, g_n, g μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέτρο, αποδείξτε ότι $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ κατά μέτρο. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου.

Άσκηση 7.8 (KN:–) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ομοιόμορφα φραγμένες (δηλ. υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$). Αν $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού, αποδείξτε ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και ότι $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Άσκηση 7.9 (KN:–) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
(ι) Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, είναι αλήθεια ότι $\|f_n - f\|_1 \to 0$; Αν $\mu(X) < \infty$;
(ιι) Αν $\|f_n - f\|_1 \to 0$, δείξτε ότι για κάθε g μετρήσιμη και φραγμένη ισχύει $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $\int f_n g d\mu \to \int f g d\mu$. Ισχύει το αντίστροφο;