8 Το Θεώρημα Radon-Nikodym

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη. Ορίζουμε

$$\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \to \int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu.$$

Τότε το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$, δηλαδή είναι σ-προσθετικό. Αυτό έπεται από το Θεώρημα B. Levi: αν $A = \cup_n A_n$ όπου τα $A_n \in \mathcal{A}$ είναι ξένα ανά δύο έχουμε $\chi_A = \sum_n \chi_{A_n}$ κατά σημείο και άρα

$$\int \chi_A f d\mu = \int \sum_n \chi_{A_n} f d\mu = \sum_n \int \chi_{A_n} f d\mu.$$

Επιπλέον αν $\mu(A) = 0$ τότε $\chi_A f = 0$ μ-σ.π. και άρα $\nu(A) = \int \chi_A f d\mu = 0$.

Ορισμός 8.1 *Ένα μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ λέγεται* ***απόλυτα συνεχές ως προς το*** *μ (γράφουμε $\nu \ll \mu$) αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\nu(A) = 0$.*

Η απόλυτη συνέχεια ενός μέτρου ν είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι το ν το «αόριστο ολοκλήρωμα» $A \to \int_A f d\mu$ μιας συνάρτησης f. Θα δείξουμε ότι, με κάποιες επιπλέον συνθήκες, είναι και ικανή.

Παρατήρηση 8.1 Η σχέση $\nu(A) = \int \chi_A f d\mu$ που ορίζει το μέτρο ν γράφεται ισοδύναμα

$$\int \chi_A d\nu = \int \chi_A f d\mu \qquad (A \in \mathcal{A})$$

και έπεται από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος ότι αν g είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση στο X τότε

$$\int g d\nu = \int g f d\mu.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, +\infty]$. Πράγματι, αν g είναι μια τέτοια συνάρτηση τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία g_n από μη αρνητικές απλές συναρτήσεις που συγκλίνουν στην g κατά σημείο. Επειδή $g_n f \nearrow fg$ κατά σημείο, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έπεται ότι $\int g_n f d\mu \nearrow \int f g d\mu$ και $\int g_n d\nu \nearrow \int g d\nu$, οπότε, εφόσον $\int g_n d\nu = \int g_n f d\mu$ για κάθε n, έχουμε $\int g d\nu = \int g f d\mu$.

Θεώρημα 8.2 (Radon-Nikodym I) *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και ν πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu \ll \mu$. Υπάρχει μη αρνητική $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, μοναδική modulo ισότητα μ-σ.π., ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \qquad (A \in \mathcal{A})$$

και επομένως $\int g d\nu = \int g f d\mu$ για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση g στο X.

Η συνάρτηση f λέγεται η ***παράγωγος Radon-Nikodym*** *του ν ως προς μ και συμβολίζεται με $\dfrac{d\nu}{d\mu}$.*

Απόδειξη Η μοναδικότητα αποδεικνύεται εύκολα: Αν $\int_A f_1 d\mu = \int_A f_2 d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε $\int_A (f_1 - f_2) d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, άρα $f_1 = f_2$ μ-σχεδόν παντού.

Παρατηρούμε επίσης ότι $\int f d\mu = \nu(X) < +\infty$ και άρα η f, αν υπάρχει, ανήκει στον $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Η **απόδειξη της ύπαρξης** της παραγώγου Radon-Nikodym θα γίνει σε μερικά βήματα.

Λήμμα 8.3 *Ορίζουμε*

$$\mathcal{H} = \{h : X \to [0, +\infty] \text{ μετρήσιμη} : \int_A h d\mu \leq \nu(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}\}.$$

Υπάρχει $f \in \mathcal{H}$ ώστε $\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι

1. $\mathcal{H} \neq \emptyset$, αφού $0 \in \mathcal{H}$.

2. Αν $h, g \in \mathcal{H}$ τότε $h \vee g \in \mathcal{H}$.
   [Πράγματι αν $B = \{x \in X : h(x) \geq g(x)\}$ τότε $B \in \mathcal{A}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A (h \vee g) d\mu &= \int_{A \cap B} (h \vee g) d\mu + \int_{A \setminus B} (h \vee g) d\mu \\ &= \int_{A \cap B} h d\mu + \int_{A \setminus B} g d\mu \leq \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A).]\end{aligned}$$

3. Αν (h_n) είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{H}$ για κάθε n τότε $\lim_n h_n \in \mathcal{H}$.
[Απόδειξη: Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,
$$\int_A \lim_n h_n d\mu = \int \lim_n h_n \chi_A d\mu = \lim_n \int h_n \chi_A d\mu \leq \nu(A).]$$

Αν $h \in \mathcal{H}$ τότε $\int h d\mu \leq \nu(X) < +\infty$. Επομένως θέτοντας

$$a = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$$

έχουμε $0 \leq a \leq \nu(X)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε $h_n \in \mathcal{H}$ ώστε $\int h_n d\mu > a - \frac{1}{n}$. Αν $g_n = h_1 \vee h_2 \vee \ldots \vee h_n$, τότε $g_n \in \mathcal{H}$ και $\int g_n d\mu \geq \int h_n d\mu > a - \frac{1}{n}$. Θέτοντας $f = \sup_n g_n$ έχουμε $f \in \mathcal{H}$ γιατί η (g_n) είναι αύξουσα και $a \geq \int f d\mu \geq \int g_n d\mu > a - \frac{1}{n}$ για κάθε n, άρα $a = \int f d\mu$. $\square$

- *Θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα η f είναι η ζητούμενη συνάρτηση*[1].

Ορίζουμε $\nu_o : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ από τη σχέση

$$\nu_o(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu \quad (A \in \mathcal{A})$$

και παρατηρούμε ότι $\nu_o(A) \geq 0$ αφού $f \in \mathcal{H}$.

Λήμμα 8.4 *Υπάρχει $M \in \mathcal{A}$ ώστε $\nu_o(M) = 0$ και $\mu(M^c) = 0$.*

Απόδειξη Το σύνολο M θα κατασκευασθεί από μια οικογένεια $\{B_{m,n} : n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ που θα ικανοποιούν την σχέση $\nu_o(B_{m,n}) < \frac{1}{n}\mu(B_{m,n})$ ενώ ταυτόχρονα το $\mu(B_{m,n})$ θα είναι «αρκετά μεγάλο».

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$, ορίζουμε μια βοηθητική οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{D}_n(A) = \left\{ B \in \mathcal{A} : B \subseteq A \text{ και } \nu_o(B) < \frac{1}{n}\mu(B) \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $B \in \mathcal{D}_n(A)$ τότε αναγκαστικά $\mu(B) > 0$.

[1] Παρατήρησε ότι η f είναι αναγκαστικά μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{H}$. Πράγματι, αν $g \in \mathcal{H}$ και $g \geq f$ τότε $g - f \geq 0$ και $\int g d\mu \geq \int f d\mu$. Αλλά επειδή $\int f d\mu = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$ έχουμε $\int g d\mu = \int f d\mu$ δηλ. $\int (g - f) d\mu = 0$ και άρα $g = f$ μ-σχεδόν παντού.

Παρατήρηση 1 Αν $\mu(A) > 0$, η οικογένεια $\mathcal{D}_n(A)$ δεν είναι κενή.

Απόδειξη Έστω ότι $\mathcal{D}_n(A) = \emptyset$, δηλαδή έστω ότι για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ έχουμε $\nu_o(B) \geq \frac{1}{n}\mu(B)$. Θέτουμε $g = f + \frac{1}{n}\chi_A$, οπότε

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \frac{1}{n}\mu(A) = a + \frac{1}{n}\mu(A) > a$$

εφόσον $\mu(A) > 0$. Παρατηρούμε όμως ότι $g \in \mathcal{H}$. [Πράγματι, για κάθε $C \in \mathcal{A}$ έχουμε $\frac{1}{n}\mu(C \cap A) \leq \nu_o(C \cap A)$ από την υπόθεση και άρα

$$\begin{aligned}\int_C g d\mu = \int_C f d\mu + \frac{1}{n}\int_C \chi_A d\mu = \int_C f d\mu + \frac{1}{n}\mu(C \cap A) \\ \leq \int_C f d\mu + \nu_o(C \cap A) \leq \int_C f d\mu + \nu_o(C) = \nu(C).]\end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $a = \sup\{\int h d\mu : h \in \mathcal{H}\}$.

Κατασκευή Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κατασκευάζουμε μια οικογένεια $\{B_{m,n} : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}_n(X)$ ξένων ανά δύο συνόλων ως εξής:

- Ξεκινάμε με ένα αυθαίρετο $B_{1,n} \in \mathcal{D}_n(X)$ (υπενθυμίζουμε ότι $\mu(B_{1,n}) > 0$ από τον ορισμό του $\mathcal{D}_n(X)$).
- Αν $\mu(B_{1,n}^c) = 0$, η κατασκευή τελειώνει: θέτουμε $B_{m,n} = \emptyset$ για κάθε $m > 1$.
- Αν $\mu(B_{1,n}^c) > 0$, εφόσον η $\mathcal{D}_n(B_{1,n}^c)$ δεν είναι κενή, επιλέγουμε $B_{2,n} \in \mathcal{D}_n(B_{1,n}^c)$ με $\mu(B_{2,n}) > \frac{1}{2}a_{2,n}$ όπου $a_{2,n} = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{D}_n(B_{1,n}^c)\}$.
- Αν $\mu((B_{1,n} \cup B_{2,n})^c) = 0$, θέτουμε $B_{m,n} = \emptyset$ για κάθε $m > 2$.
- Αν $\mu((B_{1,n} \cup B_{2,n})^c) > 0$ επιλέγουμε $B_{3,n} \in \mathcal{D}_n((B_{1,n} \cup B_{2,n})^c)$ με $\mu(B_{3,n}) > \frac{1}{2}a_{3,n}$ όπου $a_{3,n} = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{D}_n((B_{1,n} \cup B_{2,n})^c)\}$.
- Συνεχίζουμε επαγωγικά: Έστω ότι έχουμε βρει $B_{1,n}, B_{2,n}, \ldots B_{k-1,n}$ ώστε $B_{j,n} \in \mathcal{D}_n((B_{1,n} \cup \ldots \cup B_{j-1,n})^c)$ με $\mu(B_{j,n}) > \frac{1}{2}a_{j,n}$ όπου $a_{j,n} = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{D}_n((B_{1,n} \cup \ldots \cup B_{j-1,n})^c)\}$ για $j < k$. Τότε, αν $\mu((B_{1,n} \cup \ldots \cup B_{k-1,n})^c) = 0$ θέτουμε $B_{m,n} = 0$ για κάθε $m \geq k$, αλλιώς επιλέγουμε $B_{k,n} \in \mathcal{D}_n((B_{1,n} \cup \ldots \cup B_{k-1,n})^c)$ με $\mu(B_{k,n}) > \frac{1}{2}a_{k,n}$ όπου $a_{k,n} = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{D}_n((B_{1,n} \cup \ldots \cup B_{k-1,n})^c)\}$.

Παρατηρούμε ότι, εφόσον για κάθε n τα $\{B_{m,n} : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ξένα ανά δύο, έχουμε

$$\sum_m a_{m,n} < 2 \sum_m \mu(B_{m,n}) = 2\mu\left(\bigcup_m B_{m,n}\right) \leq 2\mu(X) < +\infty,$$

και επομένως $\lim_m a_{m,n} = 0$.

$$\text{Θέτουμε τώρα} \quad M_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{m,n} \quad \text{και} \quad M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} M_n.$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη του Λήμματος μένει να δειχθεί ότι $\mu(M^c) = 0$ και $\nu_o(M) = 0$.

Απόδειξη ότι $\mu(M^c) = 0$.
Έχουμε $M \supseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} M_n$ για κάθε k άρα $M^c \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} M_n^c$ και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(M_n^c) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι αν $\mu(M_n^c) > 0$ τότε από την Παρατήρηση 1 υπάρχει $D \in \mathcal{D}_n(M_n^c)$, οπότε βεβαίως $\mu(D) > 0$. Για κάθε m έχουμε $M_n^c = (\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k,n})^c \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} B_{k,n}\right)^c$ άρα $D \in \mathcal{D}_n(M_n^c) \subseteq \mathcal{D}_n\left(\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} B_{k,n}\right)^c\right)$ και άρα

$$0 < \mu(D) \leq \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{D}_n((B_{1,n} \cup B_{2,n} \cup \ldots \cup B_{m-1,n})^c)\} = a_{m,n}$$

για κάθε m ενώ $\lim_m a_{m,n} = 0$, άτοπο.

Απόδειξη ότι $\nu_o(M) = 0$.
Έχουμε $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ όπου $N_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} M_n$ επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\nu_o(N_k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε n ισχύει $\nu_o(B_{m,n}) \leq \frac{1}{n}\mu(B_{m,n})$ για κάθε m και συνεπώς

$$\nu_o(M_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu_o(B_{m,n}) \leq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_{m,n}) = \frac{1}{n}\mu(M_n) \leq \frac{1}{n}\mu(X).$$

Αλλά για κάθε $n \geq k$ έχουμε $N_k \subseteq M_n$ άρα $\nu_o(N_k) \leq \nu_o(M_n) < \frac{1}{n}\mu(X)$. Επομένως $\nu_o(N_k) = 0$. $\square$

Ολοκλήρωση της Απόδειξης του Θεωρήματος Εφόσον $\nu \ll \mu$, από τη σχέση $\mu(M^c) = 0$ προκύπτει ότι $\nu(M^c) = 0$ και επομένως $\nu_o(M^c) = 0$, άρα τελικά $\nu_o(X) = 0$. $\square$

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη του θεωρήματος το μόνο σημείο όπου χρησιμοποιήθηκε η απόλυτη συνέχεια του ν ήταν για να συμπεράνουμε ότι αν $\mu(M^c) = 0$ και $\nu_o(M) = 0$, τότε $\nu_o = 0$. Επομένως έχουμε αποδείξει την ακόλουθη γενικότερη

Πρόταση 8.5 *Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου και ν ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$, τότε υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, που είναι μοναδική modulo ισότητα μ-σ.π., ώστε το μέτρο ν_o που ορίζεται από τη σχέση*

$$\nu_o(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu \qquad (A \in \mathcal{A})$$

να είναι ***κάθετο*** *στο μ (ή* ***ιδιάζον ως προς το*** *μ), δηλαδή να «ζει σε ένα μ-μηδενικό σύνολο»: να υπάρχει $M \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(M^c) = 0$ και $\nu_o(M) = 0$. Γράφουμε $\nu_o \perp \mu$. Έχουμε*

$$\nu = \nu_o + \nu_1$$

όπου $\nu_1(A) = \int_A f d\mu$ άρα $\nu_1 \ll \mu$ και $\nu_o \perp \mu$ (άρα και $\nu_o \perp \nu_1$).

Παρατήρηση 8.6 (Επεκτάσεις του Θεωρήματος Radon-Nikodym) *Έστω μ, ν μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ με μ σ-πεπερασμένο και $\nu \ll \mu$.*

(**i**) *Αν το ν είναι πεπερασμένο, το συμπέρασμα του Θεωρήματος είναι το ίδιο.*

(**ii**) *Αν το ν είναι σ-πεπερασμένο, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}_+$ μετρήσιμη (αλλά όχι κατ'ανάγκην στον $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$) ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

(**iii**) *Αν το ν είναι αυθαίρετο, υπάρχει $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη (αλλά όχι κατ'ανάγκην $f : X \to \mathbb{R}_+$) ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

(**iv**) *Αν το μ δεν είναι σ-πεπερασμένο, η παράγωγος Radon-Nikodym δεν υπάρχει πάντα. Για παράδειγμα αν $X = [0, 1]$ και η $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλα τα αριθμήσιμα και όλα τα συναριθμήσιμα υποσύνολα, ορίζουμε $\mu(A) = |A|$ και θέτουμε $\nu(A) = 0$ όταν το A είναι αριθμήσιμο και $\nu(A) = 1$ όταν το A δεν είναι αριθμήσιμο. Τα μ και ν είναι μέτρα (μάλιστα το ν είναι πεπερασμένο) και $\nu \ll \mu$. Όμως, αν υπήρχε f ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ τότε θα είχαμε $\int f d\mu = \nu([0, 1]) = 1$ ενώ*

$$0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x)$$

για κάθε $x \in [0, 1]$, πράγμα αδύνατο.