Θεωρία Μέτρου

Εξετάσεις 24 Ιανουαρίου 2002

1. (α) Αν $\mathcal{A}$ είναι άπειρη σ-άλγεβρα σ'ένα σύνολο X αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}$ που είναι 1-1.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αποδείξτε ότι υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ που είναι G_δ και πυκνό στο $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Μπορεί το A να είναι αριθμήσιμο;

2. (α) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα Steinhaus.

(β) Έστω $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ η ακολουθία των υποσυνόλων του $[0,1]$ με την οποία κατασκευάζεται το σύνολο Cantor, $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

(ι) Αν $x \in [0,1]$, αποδείξτε ότι για κάθε n υπάρχουν $y_n, z_n \in C_n$ ώστε $x = y_n - z_n$.

(ιι) Αποδείξτε ότι $C - C = [0,1]$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το (ι)]

3. Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας, $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ μετρήσιμα σύνολα ώστε $\mu(A_k) > \frac{1}{2}$ για κάθε k. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δείκτες $k_1, k_2, \ldots, k_n$ διαφορετικοί ανά δύο ώστε $\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_i} \neq \emptyset$. [Υπόδειξη: Εξετάστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f = \sum_{k=1}^{2n} \chi_{A_k}$.]

4. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (A_n) ακολουθία μετρησίμων συνόλων. Αποδείξτε:

(ι) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$,

(ιι) αν $\mu(X) < \infty$, τότε $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Για κάθε $\epsilon > 0$ θέτουμε $A_{n,\epsilon} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$.

(ι) Αποδείξτε ότι $\limsup_n A_{n,\epsilon} = \emptyset$.

(ιι) Αποδείξτε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue για χώρους μέτρου πιθανότητας, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα.

5. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{αν } x = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της. Είναι η f Riemann ολοκληρώσιμη;

(β) (ι) Δώστε παράδειγμα χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και ακολουθίας (f_n) μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ που να συγκλίνει σε μια μετρήσιμη συνάρτηση f κατά σημείο μ-σχεδόν παντού, αλλά να μην συγκλίνει στην f ως προς την $\|.\|_1$.

(ιι) Δώστε παράδειγμα χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και ακολουθίας (g_n) μετρήσιμων συναρτήσεων $g_n : X \to \mathbb{R}$ που να συγκλίνει σε μια μετρήσιμη συνάρτηση g ως προς την $\|.\|_1$, αλλά να μην συγκλίνει στην g κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

(ιιι) Αποδείξτε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (h_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $h_n : X \to \mathbb{R}$ συγκλίνει ως προς την $\|.\|_1$ (αρκεί μάλιστα να είναι βασική ως προς την $\|.\|_1$), τότε έχει υπακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

Να γραφούν τέσσερα θέματα.

Καλή επιτυχία!