Θεωρία Μέτρου

Εξετάσεις 3 Φεβρουαρίου 2005

1. (1μ) Έστω $(\Omega, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ ακολουθία μέτρων στον $(\Omega, \mathcal{S})$ που είναι αύξουσα. Θέτουμε

$$\mu(A) = \lim_n \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Να αποδειχθεί ότι το μ είναι μέτρο.

2. (2μ) Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (f_n) ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων με μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Υποθέτουμε ότι $f_n \to 0$ μ-σχεδόν παντού. Εξετάστε αν αληθεύει κάθε μία από τις ακόλουθες σχέσεις (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

$$(i) \qquad \lim_n \int f_n d\mu = 0, \qquad (ii) \qquad \sum_n \int f_n d\mu = \int \sum_n f_n d\mu.$$

3. (2μ) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{S}.$$

Να αποδειχθεί ότι το μ είναι μέτρο.

4. (3μ) (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) ακολουθία μετρησίμων συνόλων. Αν $\limsup A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ αποδείξτε ότι:

(ι) $\limsup A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{για άπειρα } n\}$,

(ιι) $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Για κάθε $\epsilon > 0$ θέτουμε $N(n, \epsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$.

(ι) Αποδείξτε ότι $\limsup_n N(n, \epsilon) = \emptyset$.

(ιι) Αποδείξτε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue για χώρους μέτρου πιθανότητας, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα.

5. (3μ) (ι) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $\quad f(x) = \begin{cases} n & \text{αν } \; x = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της. Είναι η f Riemann ολοκληρώσιμη;

(ιι) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις $f(x) = \cos x$ και $g(x) = \cos^2 x$, εξετάστε αν υπάρχουν τα ολοκληρώματα

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$$

όπου λ το μέτρο Lebesgue.

6. (2μ) (ι) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (s_n) απλών ολοκληρωσίμων συναρτήσεων ώστε $\|s_n - f\|_1 \to 0$.

(ιι) Αποδείξτε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (h_n) ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $h_n : X \to \mathbb{R}$ που συγκλίνει ως προς την $\|.\|_1$ (αρκεί μάλιστα να είναι βασική ως προς την $\|.\|_1$), τότε έχει υπακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο μ-σχεδόν παντού.

Να γραφούν πέντε θέματα.

Καλή επιτυχία!