ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛ. ΣΥΝΑΡΤ. 14 Δεκεμβρίου 2015

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου

Πρόταση (f_n) μετρ, f μετρ:

$f_n \to f$ σχ. ομοιομ $\Rightarrow$ σ.π + κ.μ

Απόδ. $f_n \to f$ σχ. ομοιομ. σημαίνει:

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists A_k \in \mathcal{A}, \mu(A_k) < \frac{1}{k}$:

$\underbrace{f_n \to f \text{ ομοιομ στο } A_k^c}$ (*)

νδο $f_n \to f$ μ-σπ:

Θέτω $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\mu(A) \le \mu(A_k) < \frac{1}{k}$ $\forall k$

$\Rightarrow \mu(A) = 0$

ισχ $\forall x \in A^c$, $f_n(x) \to f(x)$

πράγματι, $x \in A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c$ δηλ $\exists k \in \mathbb{N}$: $x \in A_k^c$

ενώ όμως $f_n \to f$ ομοιομ

άρα και $f_n(x) \to f(x)$

άρα $f_n \to f$ μ-σπ.

νδο $f_n \to f$ κατά μέτρο

Έστω $\epsilon > 0$ από (*)

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon, k)$: $\forall n \ge n_0$

$x \in A_k^c \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

μετάφραση

$\forall n \ge n_0 \qquad \{y : |f_n(y) - f(y)| \ge \epsilon\} \subseteq A_k$

$\Downarrow$

$\forall n \ge n_0 \quad \mu(\{y : |f_n(y) - f(y)| \ge \epsilon\}) \le \mu(A_k) < \frac{1}{k}$

Έδειξα ότι $\underbrace{\mu(\{y : |f_n(y) - f(y)| \ge \epsilon\})}_{} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

πιο αναλυτικά: Θέλω νδο ότι $\forall \epsilon > 0$: $\to 0$ καθώς $n \to \infty$

δηλ. $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\epsilon, \delta)$:

$\forall n \ge n_0$: $\mu(\{ \qquad \}) < \delta$

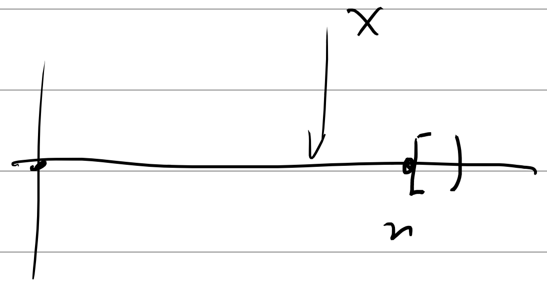
το έδειξα $\forall \epsilon > 0$ και $\forall \delta$ της

μορφής $\delta = \frac{1}{k}$. ∎

Παράδ. ∃ ακολ. f_n: $f_n \to f$ κατά μ-σ.π και κ.μ αλλά όχι σχ. ομοιομ.

στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$

$$f_n = \chi_{[n, n+\frac{1}{n})}$$



$f_n \to 0$ κατά σημείο

Ισχ. $f_n \to 0$ κατά μέτρο

Απόδ. $\forall \varepsilon > 0$ $\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}$

$\varepsilon \in (0, 1]$

$$\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) = 1\} = [n, n+\tfrac{1}{n})$$

άρα $\lambda(\{x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = \lambda([n, n+\frac{1}{n})) = \frac{1}{n} \to 0$ ∎

Ισχ. $f_n \not\to 0$ σχ. ομοιόμορφα

Απόδ. Έστω $B \in \mathcal{M}_\lambda$ τ.ω $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο B^c.
Θα δείξω ότι το B δεν έχει "μικρό" μέτρο.
Τι σημαίνει $f_n = \chi_{[n, n+\frac{1}{n})} \to 0$ ομοιόμορφα στο B^c;

πρέπει $\exists n_0 : \forall n \geq n_0, \forall x \in B^c, f_n(x) = 0$ δηλ. $x \notin [n, n+\frac{1}{n})$

δηλ. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \; B^c \subseteq [n, n+\frac{1}{n})^c$

$$\Updownarrow$$

$$\forall n \geq n_0 \quad [n, n+\tfrac{1}{n}) \subseteq B$$

δηλ. $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \underbrace{[n, n+\tfrac{1}{n})}_{\text{ξένα}} \subseteq B$

$$\lambda(\quad) \leq \lambda(B)$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda([n, n+\tfrac{1}{n}))$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \lambda(B)$$

$$= +\infty \; !$$

άρα $\nexists$ B "μικρό": $f_n \to 0$ ομοιομ. στο B^c.

Προτ. $f_n \to f$ κατά μέσο (δηλ. $\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$)
τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο

Απόδ. $\forall \epsilon > 0$ από Markov

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \int |f_n - f|\, d\mu$$

οπότε αν $\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$ τότε $\forall \epsilon > 0$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Αντίστροφο εν γένει όχι

Παράδ. Σε $([0,1], \mathcal{M}_{L}, \lambda)$
$f_n = n \chi_{(0,\frac{1}{n})}$

τότε προφανώς $f_n \not\to 0$ κατά μέσο διότι $\int |f_n - 0|\, d\mu$
$= n \lambda((0,\frac{1}{n}))$
$= 1 \quad \forall n$

Ισχ. $f_n \to 0$ κατά μέτρο

διότι $\forall \epsilon > 0$ $(\epsilon \leq 1)$ αν $\{x : |f_n(x) - 0| \geq \epsilon\}$
$=$
$\{x : |n \chi_{(0,\frac{1}{n})}| \geq \epsilon\}$
$=$
$(0, \frac{1}{n})$

οπότε $\mu(\{x : |f_n(x) - 0| \geq \epsilon\}) = \frac{1}{n} \to 0$

(όλες μετρήσιμες)

<u>Πρόταση</u> Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο
και επιπλέον $\exists g \in \mathcal{L}_1$ ώστε $|f_n| \le g$ σ.π. $\forall n$
τότε $f_n \to f$ στο L_1

<u>Απόδ.</u> Μοιάζει Θεωρ. Κυριαρχ. Συγκλ.
Αν ήξερα $f_n \to f$ σ.π., τότε θα ήταν ΟΚ.
όμως δεν ισχύει κατ' ανάγκη.

Πάω με άτοπο: Αν $\int |f_n - f| \, d\mu \not\to 0$
τότε $\exists \epsilon > 0$ και $\exists$ υπακ. (f_{k_n}) της (f_n)

ώστε $\int |f_{k_n} - f| \, d\mu \geq \epsilon$ $\forall n$ $(*)$

Κοιτάω την (f_{k_n}): ξέρω $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο

$\Downarrow$

Ξέρω επίσης ότι η (f_{k_n}) έχει μια υπακολουθία
$(f_{k_{\lambda_n}})$ τ.ω. $f_{k_{\lambda_n}} \to f$ σ.π.

από την υπόθ.: $|f_{k_{\lambda_n}}| \le g$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\int$σιμη

άρα από Θ. Κυριαρχ. Συγκλ.

$$\int |f_{k_{\lambda_n}} - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

αντίφαση με $(*)$ ∎

Προσέγγιση $\int$σιμων με απλές

<u>Λήμμα</u> (από παλιά) $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη

Τότε $\exists\ (s_\nu)$ απλές μετρήσιμες, $(s_\nu(X) \subseteq \mathbb{R})$

$: s_\nu \to f$ κατά σημείο

και $|s_\nu| \leq |s_{\nu+1}| \leq |f|$ $\forall \nu$

Επίσης, αν f φραγμ, τότε $s_\nu \to f$ ομοιόμορφα.

<u>Απόδ</u> Γράφω $f = f_+ - f_-$, $f_\pm \geq 0$, μετρήσιμες

Ξέρω ότι $\exists\ (\sigma_\nu), (\tau_\nu)$ απλές μετρ, ≥ 0

$\sigma_\nu \nearrow f_+$ και $\tau_\nu \nearrow f_-$

$\Rightarrow$ αν θέσω $s_n = \sigma_\nu - \tau_\nu$: απλή μετρ

$s_\nu \to f_+ - f_-$ κατά σημείο

Επίσης, $|s_n| = |\sigma_\nu - \tau_\nu| \leq f_+ + f_- = |f|$

όμως, $f_+(x) f_-(x) = 0$ $\forall x$

άρα $0 \leq \sigma_n \tau_n \leq f_+ f_- = 0$ $\forall n$ άρα $|\sigma_n - \tau_n| = \max(\sigma_n, \tau_n)$

οπότε $(|s_\nu|)$ αύξουσα (δες και (*))

Επίσης $|s_n| \leq |f|$

αν f φραγμ τότε f_+, f_- είναι και οι δύο φραγμ

διότι $0 \leq f_+ + f_- = |f|$ φραγμ

όμως έχω δείξει $\sigma_\nu \to f_+$ ομοιομ

και $\tau_n \to f_-$ ομοιομ

άρα $s_n \to f$ ομοιομ ∎

(*) <u>ισχ</u> $|\sigma_n - \tau_\nu| = \max\{\sigma_\nu, \tau_n\}$ άρα αυτή αύξουσα ακολουθία

Έστω $x \in X$. Αν $f(x) \geq 0$ τότε $f_-(x) = 0$ άρα $\tau_\nu(x) = 0$

άρα $|\sigma_\nu - \tau_\nu|(x) = \sigma_\nu(x)$

αν $f(x) < 0$ τότε $f_+(x) = 0$ άρα $\sigma_\nu(x) = 0$

άρα $|\sigma_\nu - \tau_\nu|(x) = |-\tau_\nu(x)| = \tau_\nu(x)$

Πρτ. Οι απλές ολοκληρώσιμες είναι πυκνές στον L^1

δηλ. $\forall f \in \mathcal{L}_1(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\exists (s_n)$ απλές με $\int |s_n| d\mu < \infty$ $\forall n$

ώστε $s_n \to f$ κατά μέσο

Απόδ. Από το Λήμμα, $\exists$ s_n απλές μετρήσιμες

$s_n \to f$ κατά σημείο και $|s_n| \le |f|$ $\forall n$

άρα $\int |s_n| d\mu \le \int |f| d\mu$ ''

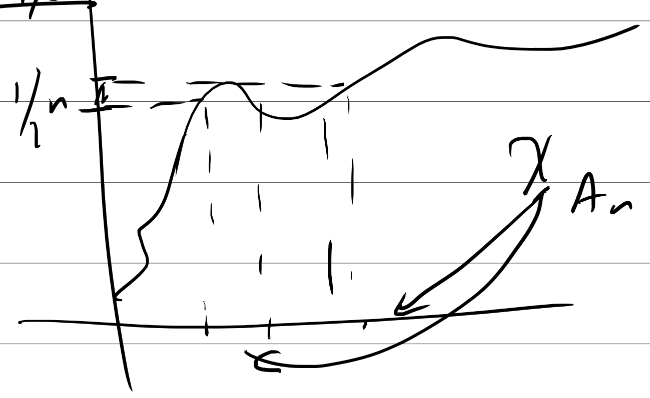
οπότε $\forall s_n \in \mathcal{L}^1$

επίσης, αφού $|s_n| \le |f|$ που είναι $\int$σιμη

εφαρμόζεται το Θεωρ. κυριαρχ. σύγκλισης!

και δίνει $\int |s_n - f| d\mu \to 0$ ∎

Παρατ.



$A_n = f^{-1}([t_n, t_{n+1})) \in \mathcal{A}$

αλλά A_n δεν είναι διάστημα

αλλά ξένη ένωση ''

Όταν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι απλές που βρίσκουμε

είναι γραμμ. συνδυασμοί

χ_{A_n} όπου $A_n = f^{-1}([t_n, t_{n+1}))$

άρα εν γένει δεν είναι κλιμακωτές.

Μπορώ όμως να βρω και κλιμακωτές (s_n')

ώστε $s_n' \to f$ κατά μέσο

(δες πιο κάτω)

Ορισμός $C_c(\mathbb{R}^k) = \{ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$: συνεχείς και (ν'α) $\exists K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγής τ.ω $f|_{K_f^c} = 0 \}$

("φορέας" $\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \neq 0\}}$)

δηλ $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ αν είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από ένα φράγμα

Επίσης, $\forall$ κανονικό μέτρο Borel μ στο $\mathbb{R}^k$, κάθε $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ είναι και $\int$σιμη: διότι είναι μετρήσιμη και επιπλέον

$$\int_{\mathbb{R}^k} |f| d\mu = \int_{K_f} |f| d\mu \leq \|f\|_\infty \mu(K_f) < +\infty$$

διότι: f συνεχής σε συμπαγές άρα φραγμ. και $\mu(K_f) < +\infty$ από κανονικότητα

Κανονικότητα: $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$,
$\mu(A) = \inf\{ \mu(G) : G$ ανοιχτό $\supseteq A \}$
και $\forall K$ συμπαγές, $\mu(K) < +\infty$
$\forall U \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοιχτό
$\mu(U) = \sup\{ \mu(K) : K$ συμπ $\subseteq U\}$

Πρτ $C_c(\mathbb{R}^k)$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^1(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \mu)$
$\forall \mu$ κανονικό μέτρο Borel
(δηλ το σύνολο των κλάσεων $\tilde{f}$ όπου $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ (mod ισότητα μ-σ.π.) είναι $\| \ \|_1$-πυκνό στο $L^1(\mathbb{R}^k, \mu)$)

Απδ $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \mu)$ και $\forall \epsilon > 0$ ψάχνω μια $g \in C_c(\mathbb{R}^k)$ τ.ω $\int |f - g| d\mu < \epsilon$

Όμως δείξαμε ότι οι απλές ολοκληρώσιμες είναι πυκνές στη $\mathcal{L}^1$. Αρκεί λοιπόν να υποθέσω ότι $f = \chi_E$, $E \subseteq \mathbb{R}^k$ Borel $\mu(E) < +\infty$ (ολοκληρώσιμη)

διότι, μετά, αν $f \in \mathcal{L}^1$ και $\epsilon > 0$, πρώτα βρίσκω $f_\epsilon = \sum c_i \chi_{E_i}$ απλή ολοκληρώσιμη: $\|f - f_\epsilon\|_1 < \epsilon$

μετά, $\forall \chi_{E_i}$ θα βρω μία g_i συνεχή με συμπαγή φορέα: $\|\chi_{E_i} - g_i\|_1 < \frac{\epsilon}{\sum |c_i|}$

οπότε: $\|f - \sum c_i g_i\|_1 \leq \|f - f_\epsilon\|_1 + \sum |c_i| \|\chi_{E_i} - g_i\|_1 < 2\epsilon$

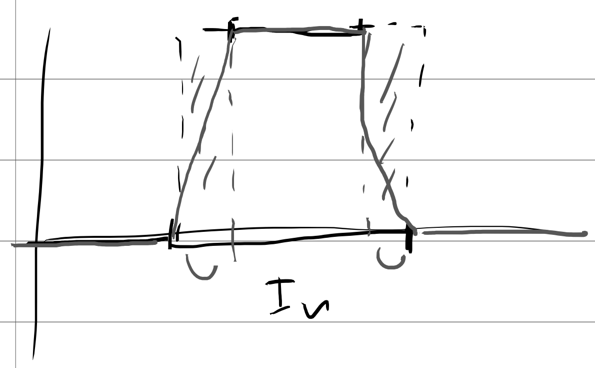
Έστω $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ με $\mu(E) < +\infty$ και $\epsilon > 0$

Έχω δείξει ότι $\exists A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ που είναι πεπερ. ένωση ξένων διαστημάτων (στον $\mathbb{R}^k$, δηλ. "κουτιών")

τ.ω. $\mu(E \Delta A) < \epsilon$

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

: I_k ξένα διαστήματα τα οποία μπορώ να τα ξεπικαλύψω



$\forall I_k$ μπορώ να βρω g_k συνεχή με $\mathrm{supp}\, g_k \subseteq I_k$ (άρα συμπ.) και $\int |\chi_{I_k} - g_k| \, d\mu < \frac{\epsilon}{2n}$

όπως

$$\|\chi_E - \sum_{k=1}^{n} g_k\|_1 = \int |\chi_E - \sum_{k=1}^{n} g_k| \, d\mu$$

$$\le \int |\chi_E - \sum_k \chi_{I_k}| \, d\mu + \sum \int |\chi_{I_k} - g_k| \, d\mu$$

$$\le \underbrace{\int |\chi_E - \chi_A| \, d\mu}_{\mu(E \Delta A)} + \epsilon/2 < 3\epsilon/2$$

διότι:

$$|\chi_E - \chi_A| = \chi_{E\Delta A} \Rightarrow \|\chi_E - \chi_A\|_1 = \mu(E \Delta A)$$

αν $x \in (E \cup A) \setminus (E \cap A)$ τότε η $\chi_E(x) = 1$ ή το $\chi_A(x) = 1$ αλλά όχι και τα δύο όποτε $|\chi_E(x) - \chi_A(x)| = 1$ και αντίστροφα

<u>Παρ.</u> Έτσι προσέγγισα (κατά μέσο) την χ_E (απλή) από $\sum \chi_{I_k}$: κλιμακωτή (διαστήματα + ξένα)

<u>Επομένως</u> $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \mu)$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^k)$ και $\exists h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ "κλιμακωτή" ώστε $\|f - g\|_1 < \epsilon$ και $\|f - h\|_1 < \epsilon$

Νικολάι Luzin ή Lusin
Λουζίν (1912)

Θεώρημα Έστω X μετρικός χώρος, και μ πεπερασμένο(;) μέτρο Borel στο X.
Αν $f: X \to \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) είναι μ-μετρήσιμη (δηλ μετρήσιμη ως προς $\mathcal{B}(X)_\mu$)
τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει
ένα ανοιχτό $A \subseteq X$ με $\mu(A) < \varepsilon$
ώστε $f|_{A^c} : A^c \to \mathbb{R}$ συνεχής

Επίσης $\exists\, g : X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε
$\mu(\{x : g(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$

Τέλος, $\sup\{|g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}$
(άρα, αν f φραγμ. τότε g φραγμ.)

Αποδ. $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ αρίθμηση των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με άκρα $\in \mathbb{Q}$
Θεωρώ $f^{-1}(V_n) \in \mathcal{B}(X)_\mu$

Όμως ξέρω ότι $\exists\, F_n$ κλειστό, G_n ανοιχτό
$F_n \subseteq f^{-1}(V_n) \subseteq G_n$
με $\mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^n$
(δες τις σημειώσεις του μαθήματος)

Θέτω $A = \bigcup_n (G_n \setminus F_n)$:
$\mu(A) \leq \sum_n \mu(G_n \setminus F_n) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$

Μένει νδο $f|_{A^c} : A^c \to \mathbb{R}$ συνεχής (στη σχετ. τοπολογ.)

Ονομάζω $Y = A^c$
Αρκεί νδο $\forall n$, $f^{-1}(V_n) \cap Y \overset{(*)}{=} Y \cap G_n$
όπου G_n ανοιχτό
διότι αυτό δείχνει ότι $f^{-1}(V_n)$ είναι ανοιχτό στο Y $\forall n$

(*) ισχύει διότι: $F_n \subseteq f^{-1}(V_n) \subseteq G_n$
$Y \cap F_n \subseteq f^{-1}(V_n) \cap Y \subseteq G_n \cap Y$
όμως $G_n \setminus F_n \subseteq A = Y^c$ άρα $(G_n \setminus F_n) \cap Y = \emptyset$
άρα $Y \cap F_n = Y \cap G_n$
άρα $Y \cap G_n \subseteq f^{-1}(V_n) \cap Y \subseteq G_n \cap Y$
άρα (*)