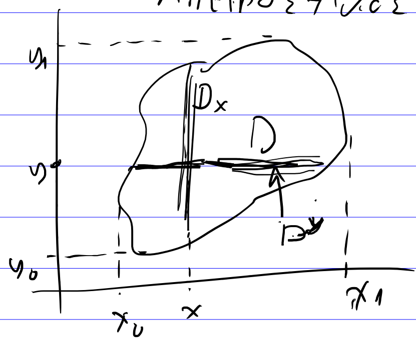
16 Δεκεμβρίου 2015

- Για το Θεώρημα Luzin, δες καλύτερα τις σημειώσεις του μαθήματος στην e-class.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΙΙΙ :



$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ ~~κλ~~ ω) φραγμ

$$\int_D f(x,y)\, dA(x,y)$$

$$\|$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{D_x} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$\|$$

$$\int_{y_1}^{y_1} \left(\int_{D^y} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Πρτ. $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ τότε $\forall x \in X$ το $C_x \subseteq Y$ ανήκει στην $\mathcal{B}$

(και το ίδιο για τα C^y: είναι στην $\mathcal{A}$)

Απόδ. Ορίζουμε $\mathcal{C} = \{ C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ που είναι ώστε $\forall x \; (C_x \in \mathcal{B}) \}$

νδο $\mathcal{C} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

- Πρώτα Αν $C = A \times B$ όπου $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ τότε $\forall x \in X$, το $C_x \in \mathcal{B}$

  Προφανώς, $C_x = \{ y \in Y : (x,y) \in A \times B \}$

$$= \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases} \in \mathcal{B}$$

(ομοίως $\forall y \in Y$, το $C^y \in \mathcal{A}$)

- αρκεί νδο ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα (διότι η $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$)

✓ • Αν $C \in \mathcal{C}$ τότε ισχ. $C^c \in \mathcal{C}$

Προφανώς, $\forall x \in X$ έχω $C_x \in \mathcal{B}$

όμως, $(C^c)_x = (C_x)^c \in \mathcal{B}$

✓ • Αν $C_n \in \mathcal{C}$ και θέσω $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ νδο $C \in \mathcal{C}$

Προφανώς, $\forall x \in X$ έχω $(C_n)_x \in \mathcal{B}$

όμως $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(C_n)_x}_{\in \mathcal{B}}}_{\in \mathcal{B}} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)_x$

δηλ. $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)_x \in \mathcal{B}$

οπότε $C \in \mathcal{C}$ ☑

$\mathcal{C}$ είναι σ-αλγ $\Longrightarrow$ $\mathcal{C} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

δηλ. $\forall C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ ισχύει ότι $\forall C_x \in \mathcal{B}$

Ομοίως δείχνω ότι $\forall C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ $\forall y \in Y$ έχω $C^y \in \mathcal{A}$. ☑

Πρτ $f: X\times Y \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρ

τότε $\forall x\in X$

$f_x : Y \longrightarrow [-\infty, +\infty]$

είναι $\mathcal{B}$-μετρ.

(ομοίως για τις $f^y : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$)

Απδ $\forall x\in X$ $\forall b\in\mathbb{R}$ νδο $(f_x)^{-1}\big((-\infty,b]\big)\in\mathcal{B}$

$$\underline{(f_x)^{-1}\big((-\infty,b]\big)} = \{y\in Y : f_x(y)\in(-\infty,b]\}$$
$$= \{y\in Y : f(x,y)\in(-\infty,b]\}$$

$$\underline{f^{-1}\big((-\infty,b]\big)} = \{(x,y) : f(x,y)\in(-\infty,b]\}$$

άρα $\Big(f^{-1}\big((-\infty,b]\big)\Big)_x = f_x^{-1}\big((-\infty,b]\big)$

όμως ξέρω ότι η f είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρ.

άρα $\forall b$, $f^{-1}\big((-\infty,b]\big)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

$\Downarrow$ (προηγούμενη πρόταση)

$\forall x\in X$, $\Big(f^{-1}\big((-\infty,b]\big)\Big)_x\in\mathcal{B}$ ΟΕΔ

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$$\chi_{C_x} = (\chi_C)_x$$

dim $C_x = \{ y \in Y : (x,y) \in C \}$

$$\chi_{C_x}(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in C_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & (x,y) \in C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = (\chi_C)_x(y)$$

Έστω $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

(1) $x \longmapsto \varphi_C(x) = \nu(C_x) \geq 0$ δείχνω φ_C $\mathcal{A}$-μετρ

(2) $y \longmapsto \psi_C(y) = \mu(C^y)$ δείχνω ψ_C $\mathcal{B}$-μετρ

(3) $\displaystyle\int_X \varphi_C(x)\,d\mu(x) = \int_Y \psi_C(y)\,d\nu(y)$

<u>Προγρ</u> (i) Τα (1), (2), (3) αληθεύουν όταν $C = A\times B$

(ii) Ονομάζω

$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} : \text{ισχύουν τα (1), (2) και (3)}\}$

και θα δείξω ότι η $\mathcal{C}$ είναι $= \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

[Αφού από το (i) η $\mathcal{C}$ περιέχει τα $A\times B$, αρκεί νδο η $\mathcal{C}$ είναι σ-αλγ]

(i) Έστω $C = A\times B$ είδαμε ότι $\forall x\in X$,

$$C_x = \begin{cases} B & , x\in A \\ \emptyset & , x\notin A \end{cases}$$

άρα $\nu(C_x) = \begin{cases} \nu(B), & x\in A \\ 0 & , x\notin A \end{cases}$

$= \nu(B)\chi_A(x)$

άρα η $x \longmapsto \nu(C_x) = \underbrace{\nu(B)}_{\text{αρ}}\chi_A(x)$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αφού $A\in\mathcal{A}$.

όμοια η $y \longmapsto \mu(C^y) = \mu(A)\chi_B(y)$ άρα $\mathcal{B}$-μετρ αφού $B\in\mathcal{B}$

τώρα $\displaystyle\int_X \varphi_C(x)\,d\mu(x) = \nu(B)\int_X \chi_A(x)\,d\mu(x) = \nu(B)\mu(A)$

$\|$

$\displaystyle\int_Y \psi_C(y)\,d\nu(y) = \mu(A)\int_Y \chi_B(y)\,d\nu(y) = \mu(A)\nu(B)$

άρα ισχύει και η (3) για το $A\times B$.

(ii) Θέτω $\mathcal{C} = \{C\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} : \text{(1), (2), (3) ισχύουν}\}$

δείξαμε ότι $\mathcal{C}$ περιέχει όλα τα $\underbrace{\text{μετρήσιμα}\ \square}$ γωνία, έστω Δ.

Η Δ είναι κλειστή ως προς πεπερ. τομές

άρα η κλάση Dynkin που παράγει η Δ είναι σ-άλγεβρα, άρα $= \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

για να τελειώσω, αρκεί νδο ότι

η $\mathcal{C}$ είναι κλάση Dynkin

<u>δηλ</u> κλειστή ως προς αύξουσες αριθμ. ενώσεις και ως προς διαφορές.

(α) Έστω $C_\nu \in \mathcal{C}$ με $C_\nu \subseteq C_{\nu+1} \subseteq \dots$

Δείξτε $C = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$ νδο $C \in \mathcal{C}$

δηλ. νδο ικανοποιεί τα (1), (2), (3)

Ξέρω ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}$

διότι $\forall C_\nu \in \mathcal{C}$ οι συναρτήσεις φ_{C_ν} είναι A-μετρ, ψ_{C_ν} $\mathcal{B}$-μετρ ≥ 0

και επιπλέον:

$$\int_X \varphi_{C_\nu}(x)\,d\mu(x) = \int_Y \psi_{C_\nu}(y)\,d\nu(y)$$

Άρα $(C_\nu)\nearrow$ άρα οι $(\varphi_{C_\nu}),(\psi_{C_\nu})$ είναι αύξουσες

νιάου νιάου τα κεραμίδια!

$$\int \underbrace{\Big(\lim_{\nu\to\infty}\varphi_{C_\nu}(x)\Big)}_{=\varphi_C(x)}d\mu(x) = \lim_\nu \int \varphi_{C_\nu}(x)\,d\mu(x)$$

άρα φ_C είναι A-μετρ

$$\int \varphi_C(x)\,d\mu(x) = \lim_\nu \int \varphi_{C_\nu}(x)\,d\mu(x)$$
$$\int \psi_C(y)\,d\nu(y) = \lim_\nu \int \psi_{C_\nu}(y)\,d\nu(y)$$

$\mathcal{B}$-μετρ διότι είναι ως όριο μετρησίμων

Πιο αναλυτικά: $C_\nu \subseteq C_{\nu+1}$

$\Downarrow$

$\forall x \quad \varphi_{C_\nu}(x) = \nu((C_\nu)_x) \leq \nu((C_{\nu+1})_x)$: (φ_{C_ν}) αύξουσα

επίσης $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_\nu = C \Rightarrow \forall x,$

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} (C_\nu)_x = C_x \quad \text{και } (C_n)_x \text{ αύξουσα}$$

(ν: μέτρο:) $\lim_n \nu((C_n)_x) = \nu(C_x)$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty} \varphi_{C_\nu}(x) = \varphi_C(x) \quad \forall x \in X$$

Δηλαδή ότι η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμ. ενώσεις

Μένει: Αν $C, D \in \mathcal{C}$ με $D \supseteq C$ τότε $D \setminus C \in \mathcal{C}$

παρατηρώ: $\forall x \in X$

$$(D \setminus C)_x = D_x \setminus C_x$$

Χρειάζεται (!!!) να υποθέσω ότι νι... μετρ... πεπερ...

$$\nu((D \setminus C)_x) = \nu(D_x \setminus C_x) = \nu(D_x) - \nu(C_x)$$

δηλ $\varphi_{D \setminus C}(x) = \varphi_D(x) - \varphi_C(x)$ σχ

(1) άρα η $\varphi_{D \setminus C}$ είναι διαφορά 2 μετρησίμων άρα μετρήσιμη

≥ 0

(2) ομοίως $\psi_{D \setminus C} = \psi_D - \psi_C$ είναι μετρήσιμη

$$\int_X \varphi_{D \setminus C}(x) d\mu(x) = \int_X (\varphi_D(x) - \varphi_C(x)) d\mu(x)$$

$$= \int_X \varphi_D(x)\, d\mu(x) - \int_X \varphi_C(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_Y \psi_D(y) d\nu(y) - \int_Y \psi_D(y) d\nu(y)$$

$$= \int_Y \psi_{D \setminus C}(y)\, d\nu(y)$$

Συμπέρασμα: όταν τα μέτρα είναι πεπερασμένα τότε $\mathcal{C}$ κλάση Dynkin, άρα

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

δηλ)

$\forall C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ισχύει φ_C, ψ_C είναι μετρ

και

$$\int_Y \varphi_C(x) d\mu(x) = \int_X \psi_C(y)\, d\nu(y)$$

Αν τα μ, ν είναι σ-πεπερ

Μπορώ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $(X_n) \nearrow$, $X_n \in \mathcal{A}$

$\mu(X_n) < +\infty$

$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, $(Y_n) \nearrow$, $Y_n \in \mathcal{B}$

$\nu(Y_n) < +\infty$

ορίζω $\mu_n : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$$

$\nu_n : \mathcal{B} \to [0,+\infty)$

$$\nu_n(B) = \nu(B \cap Y_n)$$

και $\forall n$, ξέρω ότι τα μ_n, ν_n δουλεύουν καλά δηλαδή

$$x \longmapsto \nu_n(C_x) \quad \mathcal{A}\text{-μετρ} \qquad \forall C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

$$y \longmapsto \mu_n(C^y) \quad \mathcal{B}\text{-μετρ} \qquad ''$$

και $$\int_X \nu_n(C_x)\, d\mu_n(x) = \int_Y \mu_n(C^y)\, d\nu_n(y) \quad \forall n$$

$$\|$$

$$\int_X \nu(C_x \cap Y_n)\, d\mu_n(x) \qquad \forall f \ (\text{ΑΞΙΑ!!})$$

$$\| \qquad \left(\text{διότι } \int_X f\, d\mu_n = \int_{X_n} f\, d\mu = \int_X f \chi_{X_n}\, d\mu\right)$$

$\bigcup X_n = X$ $$\int_X \nu_n(C_x)\chi_{X_n}(x)\, d\mu(x)$$

άρα: $$\int \nu_n(C_x)\, d\mu_n(x) = \int \mu_n(C^y)\, d\nu_n(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \nu_n(C_x)\chi_{X_n}(x)\, d\mu(x) = \int \mu_n(C^y)\chi_{Y_n}(y)\, d\nu(y)$$

όμως ξέρω $\varphi_C(x) = \nu(C_x) = \lim \nu(C_x \cap Y_n)$ (αφού $\bigcup Y_n = Y$)

$= \lim \nu(C_x \cap Y_n)\chi_{X_n}(x)$ (αφού $\bigcup X_n = X$)

άρα, φ_C είναι $\mathcal{A}$-μετρ

διότι $\forall n$,

επίσης $(\nu_n(C_x))_n$ αύξ.
και $(\chi_{X_n}(x))_n$ αύξ.
άρα $(\nu_n(C_x)\chi_{X_n}(x))_n$ αύξ.

$x \longmapsto \nu_n(C_x)$ είναι μετρ
και $\longrightarrow \chi_{X_n}(x)$ ''
άρα: $x \longmapsto \nu_n(C_x)\chi_{X_n}(x)$ ''

Ομοίως ψ_C είναι $\mathcal{B}$-μετρ διότι ως όριο των $y \longmapsto \mu_n(C^y)\chi_{Y_n}(y)$

όμως, $\forall x$, $\nu_n(C_x)_n \chi_{X_n}(x) \nearrow \varphi_C(x)$

$\forall y$, $\mu_n(C^y)_n \chi_{Y_n}(x) \nearrow \psi_C(y)$

Επιπλέον, $\forall n$ επειδή ν_n, μ_n είναι πεπερ., από (i):

$$\int_X \nu_n(C_x)\, d\mu_n(x) = \int_Y \mu_n(C^y)\, d\nu_n(y)$$

$$\int_X \underbrace{\nu_n(C_x)\,\chi_{X_n}(x)}_{\text{αυξ.}}\, d\mu(x) = \int_Y \underbrace{\mu_n(C^y)\,\chi_{Y_n}(y)}_{\text{αυξ}}\, d\nu(y)$$

από θεώρ. μονότ. σύγκλ.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_X \psi_C(x)\, d\mu(x) \qquad \int_Y \psi_C(y)\, d\nu(y)$$

άρα $=$ ■