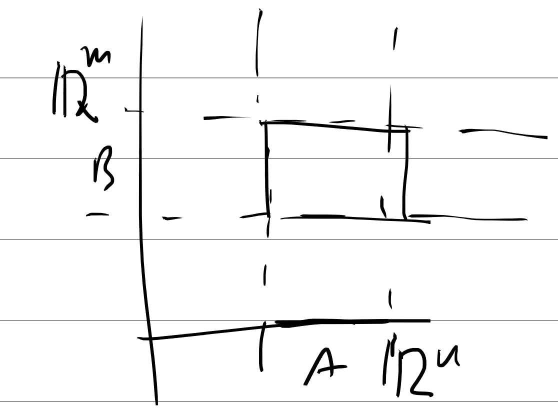
21 Δεκ 2015

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m})$$

$\parallel$

σ-άλγ. που παράγ. από τα $A \times B$



Απόδ. (α) Αν $A \in \mathcal{B}_k$, $B \in \mathcal{B}_m$ τότε

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^k \times B)$$

$$= \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B)$$

A, B Borel, π_1, π_2 συνεχείς
$\Rightarrow \pi_1^{-1}(A)$ και $\pi_2^{-1}(B)$ είναι Borel

άρα κάθε $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m})$

$\Downarrow$

σ(που παράγ. από τα $A \times B$) $\subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m})$

$\parallel$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

(β) ΝΔΟ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+m}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$

αρκεί νδο κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ ανήκει

όμως, ξέρω $\forall$ G ανοιχτό

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n$$

όπου τα $A_n \subseteq \mathbb{R}^k$ και $B_n \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτά κουτιά (διαστήματα) με ρητά άκρα.

Κάθε $A_n \times B_n$ εξ ορισμού $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$
και αυτή είναι σ-άλγ
άρα $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n \in$ ∎

Όμως

Ισχ. $\exists\, A \times B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}^{k+m})$ αλλά $A \times B \notin \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}^m)$

υποθέτω για ευκολία ότι $k = m = 1$

ισχ. $\exists\, A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ να είναι μετρήσιμο ως προς το λ_2

Αλλά οι πλευρές του όχι και οι δύο μετρήσιμες.

Πρόδ: Πάρε $A \subseteq [0,1]$ όχι μετρήσιμο
και $B \subseteq [0,1]$ ένα μετρήσιμο, $\neq \emptyset$, $\lambda(B) = 0$
(πχ το Cantor)

$$A \times B \subseteq \underbrace{[0,1] \times B}_{\text{μια χαρά μετρήσιμο}}, \quad \lambda_2([0,1] \times B) = 0$$

Όμως το λ_2 είναι πλήρες μέτρο, άρα:

το $A \times B$ είναι στη $\mathcal{M}_{\lambda_2^*}$

ενώ $\underbrace{A \times B}_{C} \notin \mathcal{M}_{\lambda^*} \otimes \mathcal{M}_{\lambda^*}$

διότι θα έπρεπε κάθε $C^y \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$
όμως είδαμε ότι, αν $y \in B$, τότε $C^y = A$, όχι μετρ!

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-πεπερ χώροι μέτρου
Δείξαμε ότι $\forall\, C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ισχύει

$$\int_X \nu(C_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(C^y)\, d\nu(y)$$

$\forall C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$
ορίζω $\rho(C) =$ ... ΙΣΧ ρ είναι μέτρο στη $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

Απόδ (i) $\rho(\emptyset) = 0$ προφανώς
(ii) νδο αν $C_n \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ ξένα ανά δύο
και $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

τότε $\rho(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n)$

Έχω;

$\rho(C) = \int \nu(C_x)\, d\mu(x)$ $\quad C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

$C_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)_x \quad \forall x$

$= \int \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)_x\right) d\mu(x)$ όμως ν μέτρο

$= \int \sum_{n=1}^{\infty} \nu((C_n)_x)\, d\mu(x)$ $\quad x \mapsto \nu((C_n)_x)$ είναι ≥ 0, μετρ

$\overset{BL}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu((C_n)_x)\, d\mu(x)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n)$ άρα, ρ είναι μέτρο.

(ii) ΙΣΧ $\rho(A\times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}$

Απόδ $C = A \times B$
$C_x = \{y \in Y : (x,y) \in A \times B\} = \begin{cases} B & \text{όταν } x \in A \\ \emptyset & \text{όταν } x \notin A \end{cases}$

$\rho(A\times B) = \int \nu(C_x)\, d\mu(x) = \int_A \nu(B)\, d\mu(x) = \nu(B)\mu(B)$

άρα πράγματι το ρ ικανοποιεί.

(iii) Μοναδικότητα Αν μου δώσει ένα "άλλο" μέτρο, π, στην $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, με την ιδιότητα
$\pi(A\times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$
νδο $\pi = \rho$
Χρησιμοποιώ το γεγονός ότι και τα δύο μ, ν είναι σ-πεπερ.
οπότε μπορώ $X = \bigcup X_n$, $(X_n) \nearrow$, $X_n \in \mathcal{A}$, $\mu(X_n) < +\infty$

$Y = \bigcup Y_n$, $(Y_n)\nearrow$, $Y_n \in \mathcal{B}$, $\nu(Y_n) < +\infty$
οπότε $\forall n$,
$\pi(X_n \times Y_n) = \mu(X_n)\nu(X_n) = \rho(X_n \times Y_n)$
τα π, ρ ταυτίζονται σε μετρ. ορθ που είναι υποσύνολο κλειστό ως προς πεπερ. τομές
και επιπλέον $\exists (X_n \times Y_n)$ με πεπερ. π και ρ
τω $\bigcup X_n \times Y_n = X \times Y$
Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρ.
Μοναδικότητα και άρα π, ρ είναι ίσα στην $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. ∎

Πάμε τα διπλά ∫ματα

<u>Fubini-to</u> Θεωρώ έναν ∞×∞ πίνακα $\{a_{ij}\}$ όπου $a_{ij}\in\mathbb{R}$

αθροίζω κάθε στήλη: $\forall j,\ \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$

όταν βρω, τα προσθέτω: $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$

αντίστοιχα: αθροίζω πρώτα κάθε γραμμή! $\forall i,\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$

μετά: $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$ θα βρω το ίδιο, ή όχι;

αν $a_{ij}\geq 0$ τότε ξέρω ναι (δουλεύει πάνω στο ιδέα της Σ, δηλ:

Αν $x_n\geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\sup_N\left\{\sum_{n=1}^{N} x_n\right\}$

"Άλλη λύση": θεωρώ τον χώρο μέτρου $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$

και $\forall i\in\mathbb{N}$, τη συνάρτηση $a_i(j)=a_{ij}$ μη αρνητική και μετρήσιμη (όλες είναι $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-μετρ.)

οπότε μπορώ να εφαρμόσω Beppo Levi

$$\int_{\mathbb{N}}\sum_i a_i(j)\,d\mu(j)=\sum_i\int_{\mathbb{N}} a_i(j)\,d\mu(j)$$

δηλαδή:

$$\sum\sum_i a(i,j)=\sum_i\sum a(i,j)$$

<u>Όμως</u> όταν $a_{ij}\in\mathbb{R}$ όχι πάντα ≥ 0 το συμπέρασμα μπορεί και να <u>μην</u> ισχύει!

<u>παρ</u>
$$a_{ij}=\begin{cases} j & \text{όταν } i=j\\ -j & \text{όταν } i=j+1\\ 0 & \text{όταν } |i-j|>1\end{cases}\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0\ \cdots \\ \vdots & & \ddots & \end{bmatrix}$$

Fubini

<u>Μάθημα</u> του προβληματισμού:

αν υποθέσω ότι $\sum_i\sum_j|a_{ij}|<\infty$

τότε $\sum_i\left(\sum_j a_{ij}\right)$ και το $\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\right)$ υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) και είναι ίσα.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, ορίσαμε ρ στη $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$
(σ-πεπερ.)

Έστω: $f : X \times Y \to [0, +\infty]$
μετρήσιμη ως προς τη $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

- $\forall x$, $f_x : Y \to [0, +\infty]$ $\quad f_x(y) = f(x, y)$
είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη
άρα αφού $f_x \geq 0$ ορίζεται

$$\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) = \varphi_f(x)$$

- ισχ. $\varphi_f : X \to [0, +\infty]$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη
- ισχ. $\displaystyle\int_X \varphi_f(x)\, d\mu(x) = \int_{X \times Y} f(x,y)\, d\rho(x,y) = \int_{X \times Y} f\, d\rho$

(ομοίως, $y \longmapsto \displaystyle\int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ είναι $\mathcal{B}$-μετρ. και
$\displaystyle\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f\, d\rho$)

Βήμα 1ο: Έστω $f = \chi_C$ όπου $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

Τότε $\varphi_f(x) = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$

$$= \int_Y \chi_C(x,y)\,d\nu(y) =$$

$$= \nu(C_x)$$

άρα η φ_f είναι μετρ, όπως δείξαμε προηγουμένως

και $\int_X \varphi_f(x)\,d\mu(x) = \rho(C) = \int_{X\times Y} \chi_C(x,y)\,d\rho(x,y)$

Βήμα 2ο: f απλή μετρ (≥ 0): μορφή

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{C_n} \quad \text{όπου } C_n \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$$

και $a_n \geq 0$

τότε παρατηρώ ότι

$\forall x,\quad f_x = \sum a_n (\chi_{C_n})_x$

άρα

$$\int f_x(y)\,d\nu(y) \overset{\gamma\rho}{=} \sum a_n \underbrace{\int (\chi_{C_n})_x(y)\,d\nu(y)}_{\text{μετρ}}$$

άρα $\uparrow$ μετρ

και $\int_X \left(\int_Y f_x(y)\,d\nu(y) \right) d\mu(x) = \sum a_n \int \left(\int (\chi_{C_n})_x(y)\,d\nu(y) \right) d\mu(x)$

$$= \sum a_n \int_{X\times Y} \chi_{C_n}(x,y)\,d\rho(x,y)$$

ΟΚ και για απλές ≥ 0, μετρήσιμες

Βήμα 3ο: $f \geq 0$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρ

Ξέρω ότι $\exists\, (s_n) \nearrow$ από απλές ≥ 0 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρ. τ.ω. $s_n \nearrow f$ κατά σημείο

άρα, από ΘΜΣ,

$$\int_{X\times Y} f\,d\rho = \lim_n \int_{X\times Y} s_n\,d\rho$$

Όμως $\forall n$, $\int_{X\times Y} s_n(x,y)\,d\rho(x,y)$

$\parallel$ Βήμα 2

$$\int_X \left(\int_Y s_n(x,y)\,d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

και πάλι από Θ.Μ.Σ, $\forall x$, $(s_n)_x \nearrow f_x$.

δηλ $s_n(x,y) \nearrow f(x,y)$, άρα $\underbrace{\int_Y s_n(x,y)\,d\nu(y)}_{\varphi_n(x)} \nearrow \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$

όπου (φ_n) είναι αύξουσα ακολουθία από ≥ 0 μετρήσιμες,

άρα $\int \varphi_n(x)\,d\mu(x) \longrightarrow \int \left(\int f(x,y)\,d\nu(y) \right) d\mu(x)$

άρα τελικά

$$\int_{X\times Y} f\,d\rho = \lim_n \int_{X\times Y} s_n\,d\rho = \lim_n \int_X \left(\int_Y s_n(x,y)\,d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \lim_n \int_X \varphi_n(x)\,d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Πόρισμα

Έστω $f : X\times Y \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ είναι $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-μετρ.

έστω $\int |f|\,d\rho < +\infty$ (δηλ. $f \in \mathcal{L}^1(\rho)$)

τότε από Tonelli, $\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int |f|\,d\rho$

άρα είναι πεπερ.

Ομοίως $\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right) d\nu(y) = "$

άρα πεπ.

Αντίστροφα, αν έχω από τα διαδοχικά

π.χ. $\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x) \right) d\nu(y) < +\infty$

τότε $\;\; \| \;\; \int |f|\,d\rho < +\infty$ άρα $f \in \mathcal{L}^1(\rho)$

Fubini Ξεκινάω με μία $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$

δηλ. f $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρ

και $\int |f| \, d\rho < +\infty$

Από πόρισμα, $\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty$

άρα μ-σχεδόν $\forall x$, η

$$\varphi_{|f|}(x) := \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) < +\infty$$

δηλ. η f_x είναι $\mathcal{L}^1$

διότι $\int_Y |f_x| \, d\nu < +\infty$

(αν $h \geq 0$ και $\int h(t) \, d\mu(t) < +\infty$ τότε $h(t) < +\infty$ σχεδόν $\forall t$)

Θέτω $A = \{ x \in X : f_x \notin \mathcal{L}^1 \}$

άρα f_x μετρ:

$$x \in A \iff \int |f(x,y)| \, d\nu(y) = +\infty$$

άρα A μετρήσιμο διότι η συνάρτηση

$\varphi_{|f|}(x) = \int |f(x,y)| \, d\nu(y)$ είναι μετρ.

και $A = \varphi_{|f|}^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$

και επίσης $\mu(A) = 0$

Μπορώ τώρα να ορίσω:

$$\varphi_f(x) = \begin{cases} \int f(x,y) \, d\nu(y) & \text{όταν } f_x \in \mathcal{L}^1(\nu) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω $x \in A^c$ όπου $\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) < +\infty$

$$\varphi_f(x) = \int f(x,y) \, d\nu(y) = \int (f^+(x,y) - f^-(x,y)) \, d\nu(y)$$

$$= \int (f^+)_x \, d\nu - \int (f^-)_x \, d\nu$$

$$= \varphi_{f^+}(x) - \varphi_{f^-}(x)$$

μετρήσιμες (διότι $f^+, f^- \geq 0$ μετρ

άρα ισχύει Tonelli)

$$\forall x \in X, \quad \varphi_f(x) = (\varphi_{f^+}(x) - \varphi_{f^-}(x)) \chi_{A^c}(x)$$

όπου $\varphi_f = \underbrace{(\varphi_{f^+} - \varphi_{f^-})}_{\text{μετρ}} \underbrace{\chi_{A^c}}_{\text{μετρ}}$: φ_f είναι $\mathcal{A}$-μετρ.

οπότε $\displaystyle\int_X \varphi_f(x)\,d\mu(x) = \int \left(\varphi_{f_+}(x) - \varphi_{f_-}(x)\right)\chi_{A^c}(x)\,d\mu(x)$

Όμως $\displaystyle\int \varphi_{f_+}\,d\mu = \int \varphi_{f_+}\chi_{A^c}\,d\mu$ (διότι $\mu(A)=0$)

Αλλά από Tonelli για τη f^+

$$\int_X \varphi_{f_+}\,d\mu = \int_{X\times Y} f^+\,d\rho$$

ομοίως $\displaystyle\int_X \varphi_{f_-}\,d\mu = \int_{X\times Y} f^-\,d\rho$

$$\Rightarrow \int \varphi_f\,d\mu = \int (\varphi_{f_+} - \varphi_{f_-})\chi_{A^c}\,d\mu$$

$$= \int \varphi_{f_+}\chi_{A^c}\,d\mu - \int \varphi_{f_-}\chi_{A^c}\,d\mu$$

$$= \int \varphi_{f_+}\,d\mu - \int \varphi_{f_-}\,d\mu \quad (\text{διότι } \mu(A)=0)$$

$$= \int_{X\times Y} f^+\,d\rho - \int_{X\times Y} f^-\,d\rho$$

Δηλαδή $\displaystyle\underline{\int_X \Big(\underbrace{\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)}_{\varphi_f(x)} \Big)\,d\mu(x)} = \int_{X\times Y} f^+\,d\rho - \int_{X\times Y} f^-\,d\rho = \underline{\int_{X\times Y} f\,d\rho}$

και με τον ίδιο τρόπο:

$$\int_Y \Big(\int_X f(x,y)\,d\mu(x) \Big)\,d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,d\rho. \qquad \blacksquare$$