2 Νοεμβρίου 2015

Καλό μήνα!

$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ (πεπερασμένο, άρα φραγμ.)

ορίζω $\forall x \in \mathbb{R}$: $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty,\infty)) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty$

άρα η F_μ είναι φραγμ.

- $F_\mu(x) \geq 0$ διότι $\mu(A) \geq 0$
- F_μ αύξουσα: αν $x \leq y$ τότε $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$ $\Downarrow$ $\mu(\;\;) \leq \mu(\;\;)$
- F_μ είναι δεξιά συνεχής δηλ. όταν $t \downarrow s \Rightarrow F(t) \to F(s)$ ✓

<u>Απόδ</u> Πάρε $(t_n) \downarrow$, $t_n \to s$

$$F(t_n) - F(s) = \mu((-\infty, t_n]) - \mu((-\infty, s])$$

$$A_n = (-\infty, t_n] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad (A_n) \downarrow \underbrace{(-\infty, s]}_{A}$$

$$\text{Οπότε } \mu(A) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{\sigma\text{-προσθ}}{=} \lim_n \mu(A_n)$$

<u>Ερώτηση</u> ⟶ δηλ. $F(s) = \lim_n F(t_n)$

<u>Πότε</u> είναι η F συνεχής σε κάποιο $s \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ <u>δηλ</u> $\mu((-\infty, t]) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$ (γιατί;)

$$a < b: \quad F(b) - F(a) = \mu((-\infty, b]) \overset{\text{πεπ}}{-} \mu((-\infty, a])$$

$$= \mu((-\infty, b] \setminus (-\infty, a])$$

$$= \mu((a, b])$$

Αντίστροφα, μου δίνουν $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αρ. αύξ., δεξιά συνεχή και τα $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$

και ορίζω, $\forall \ (a,b]$

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \quad (\geq 0 \text{ αφού } F \text{ αύξ.})$$

Θέλω να επεκτείνω το μ_F σε μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$.

Ονομάζω $\Delta = \{$ πεπ. ενώσεις (ξένες) από $(a,b] \}$

ορίζω, $\forall \ A = \bigcup_{i=1}^{\nu} (a_i, b_i]$ ξένα το

$$\mu_F(A) = \sum_{i=1}^{\nu} F(b_i) - F(a_i)$$

και θέλω να επεκτείνω...

Άσκηση. Υπόδειξη
- Το $\Delta \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι άλγεβρα; αν όχι, το κάνω άλγεβρα
- Το μ_F που όρισα (είναι προφανώς πεπερ. προσθετικό) είναι σ-προσθ. όταν μπορεί

δηλ. αν $A_n \in \Delta$, ξένα ανά δύο και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Delta$

τότε $\mu_F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(A_n)$

Τώρα εφαρμόζω επέκταση Καραθεοδωρή
βρίσκω (μοναδικό;) $\tilde{\mu}$ στη
$\sigma(\Delta)$
που επεκτείνει το μ_F
ξέρω
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Ελέγχω αν ισχύει $\tilde{\mu}((-\infty, x]) = F(x) \quad \forall x$

Πρτ Το λ είναι κανονικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}^k$

Απόδ (Για $k=1$)

(i) Αν K συμπ, τότε $\lambda(K) < +\infty$

προφανώς, γιατί $\exists\, [-M, M]$ που $\supseteq K$

και τότε $\lambda(K) \leq \lambda([-M,M])$
$= 2M < +\infty$

(ii) Εξωτ. κανονικότητα: Θέλω κάθε μετρήσιμο να προσεγγίζω το λ του από έξω από ανοιχτά.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$

Θυμίζουμε: $\lambda^*(A) = \inf\{ \sum v(I_n),\ I_n \subseteq \mathbb{R}$ αν. τμ διαστ, $A \subseteq \bigcup^{\infty} I_n \}$

άρα, $\forall \epsilon>0$ υπάρχει

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

τέτοια

$$\sum (b_n - a_n) < \lambda^*(A) + \epsilon \quad (*)$$

οπότε, αν $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$: ανοιχτό

Έχω $A \subseteq G$

και $\lambda(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((a_n, b_n))$
$\overset{(*)}{<} \lambda^*(A) + \epsilon$

Έδειξα ότι $\lambda^*(A) = \inf\{ \lambda(G) : G$ αν $G \supseteq A\}$

Ειδικότερα, αν $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, τότε
$\lambda(A) = \inf\{ \lambda(G) : G$ αν $G \supseteq A\}$

(iii) Εσωτερική κανονικότητα:

Θα την δείξω $\forall A \in \mathcal{M}_\lambda$ (όχι μόνο για ανοιχτά)

$$\lambda^*(A) = \sup\{\lambda(K),\ K \text{ συμπ},\ K \subseteq A\}$$

αρκεί $\leq$

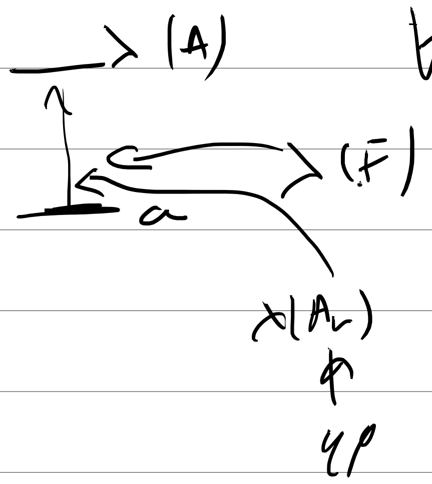
<u>Περίπτωση 1</u> A φραγμένο, έστω $K = \bar{A}$

(έγινε στον πίνακα)

<u>Περίπτωση 2</u> Γενικά: Γράφω $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$

οπότε $\forall A \in \mathcal{M}_\lambda$ μπορώ

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A \cap [-n, n])}_{\varphi\rho} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$



$\forall a \in \mathbb{R}$, $a < \lambda(A)$

θέλω να βρώ $F \subseteq A$ <u>συμπαγές</u> με $\lambda(F) > a$

Επειδή $\lambda(A_n) \nearrow \lambda(A)$, $\exists n : \lambda(A_n) > a$

από την περίπτωση 1

μπορώ να βρω συμπαγές $F \subseteq A_n \subseteq A$

ώστε $\lambda(F) > a$

που αρκεί. ∎

νδο οτι

$(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ είναι η πλήρωση του $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Αρκεί νδο $\mathcal{M}_{\lambda^*} = (\mathcal{B}(\mathbb{R}))_\lambda$

δηλ) $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \iff E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : E \subseteq A \subseteq F$ ώστε $\lambda(F \setminus E) = 0$

Έστω $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ νδο

Αρκεί να υποθέσω $\lambda(A) < \infty$ διότι

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A \cap [-n, n])}_{A_n}$$

αν δείξω ότι κάθε $A_n \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))_\lambda$ τότε

και η $\bigcup A_n \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}))_\lambda$ διότι

είναι σ-άλγεβρα

Χρησιμοποιώ τη κανονικότητα του A:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \underset{\text{συμπ}}{K_n} \subseteq A \subseteq \underset{\text{ανοικτ}}{V_n}$

$$\lambda(A) - \frac{1}{n} \underset{\text{εσωτ καν}}{<} \lambda(K_n) \leq \lambda(A) \leq \lambda(V_n) \underset{\text{εξωτ. καν}}{<} \lambda(A) + \frac{1}{n}$$

Θέτω $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (πχ E είναι F_σ)

$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (πχ F είναι G_δ)

$F \setminus E \subseteq V_n \setminus K_n$

$\Rightarrow \lambda(F \setminus E) \leq \lambda(V_n \setminus K_n) = \lambda(V_n) - \lambda(K_n) < 2/n \quad \forall n$

άρα $\lambda(F \setminus E) = 0$ και ισχύει

$K_n \subseteq A \subseteq V_n \quad \forall n$

$\Downarrow$

$E \subseteq A \subseteq F$

Το αντίστροφο είναι προφανές.

Είναι;;

Πρότ. Αν ένα μέτρο Borel μ στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί

$$\mu(I) = \lambda(I) \quad \forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ διάστημα φραγμ.}$$

τότε $\mu = \lambda$

με άλλα λόγια, το λ είναι το μοναδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $\lambda([a,b)) = b-a \quad \forall b>a$ στο $\mathbb{R}$

Απόδ. Η οικογ. Δ των διαστημάτων είναι

- κλειστή στις πεπ. τομές
- περιέχει τα $\{[-n,n] : n \in \mathbb{N}\}$ όπου $\lambda([-n,n]) = \mu([-n,n])$ και $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n]$.

και τα λ, μ συμφωνούν στην Δ.
Από το Θ. μοναδικότητας συμφωνούν στην $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\blacksquare$

Πρότ. Αν μ μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ με $\mu(K) < +\infty$ $\forall K$ συμπ. και τ.ω.

$$\mu(I+x) = \mu(I) \quad \forall I \subseteq \mathbb{R} \text{ διαστ. και } \forall x \in \mathbb{R}$$

τότε

θέτοντας $\alpha = \mu([0,1))$ ισχύει $\mu(A) = \alpha\lambda(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ▢

(Ισχύει και στο $\mathbb{R}^k$ → πιο τεχνική απόδειξη
ισχύει και σε πολύ γενικότερους ορισμούς → πολύ διαφορετική απόδειξη)

Απόδ. Πρώτα $\alpha < +\infty$, διότι $\mu([0,1)) \leq \mu([0,1]) < +\infty$ αφού $[0,1]$ συμπ.

Αν $\alpha = 0$ τότε $\mu = 0$ διότι $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1)$ ξένη (αριθμ. ένωση)

$$\Downarrow$$

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu([n,n+1)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu([0,1)) = 0$$

Έστω τώρα $\alpha > 0$.

Ορίζω $\nu(A) = \frac{1}{\alpha}\mu(A)$ (είναι μέτρο) και θα δείξω $\nu = \lambda$.

Ξέρω $\nu([0,1)) = \lambda([0,1))$ και τα δύο αναλλοίωτα στις μεταφ.

Έστω: $D_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ ισχυρίζομαι

$$\nu(D_{n,k}) = \frac{1}{2^n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Πράγματι, παρατηρώ ότι $\forall n, \forall k$:

$\nu(D_{n,k}) = \nu_n$ ανεξάρτητος του k, διότι $D_{n,k} = D_{n,0} + \frac{k}{2^n}$

$$\left[\frac{k}{2^n} - \frac{1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) = \left[\frac{-1}{2^n}, 0\right) + \frac{k}{2^n}$$

και το ν αναλλοίωτο στις μεταθέσεις

τώρα: $[0,1) = \bigcup_{k=1}^{2^n} D_{n,k}$ και ένα ξένα ανά δύο και έχουν το ίδιο μέτρο ν_n

$$\Downarrow$$

$$1 = \nu([0,1)) = \sum_{k=1}^{2^n} \nu(D_{n,k}) = 2^n \nu_n$$

$$\Downarrow$$

$$\nu_n = \frac{1}{2^n}$$

Έδειξα λοιπόν ότι

$$\nu(D_{n,k}) = \lambda(D_{n,k}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Όμως, κάθε (a,b) είναι αριθμήσιμη ένωση κύβων $D_{n,k}$

- (απόδειξη την επόμενη φορά)

Άρα, τα ν και λ ταυτίζονται στα ανοιχτά και φραγμένα διαστήματα, άρα και στη σ-άλγεβρα που παράγουν, δηλαδή στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.