4/11/2015

$$D_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \quad n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\nu(D_{n,k}) = \lambda(D_{n,k}) \quad \forall n, \forall k$$

ν: μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$

$$\Downarrow ?$$

$$\nu = \lambda$$

Αρκεί νδο $\nu((a,b)) = \lambda((a,b))$ $\forall\, a<b$

• $\forall (a,b)$ γράφεται ως αριθμ. ξένη ένωση από $\{D_{n,k}\}$ δυαδ., και για τα $\mathbb{R}^k$

Άλλη προσέγγιση:

Ισχ. • Αρκεί νδο $\forall (a,b)$ γράφεται ως (αύξ.) αριθμ. ένωση $(a,b) = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m$ όπου κάθε J_m είναι πεπερ. ξένη ένωση από $\{D_{n,k}\}$

Αν ναι, τότε έχω τελειώσει, γιατί $\forall J_m$ $\nu(J_m) = \lambda(J_m)$ από πεπερ. προσθ. των ν, λ

Τώρα, από αριθμ. προσθ.,

$$\nu((a,b)) = \lim_m \nu(J_m) = \lim_m \lambda(J_m) = \lambda((a,b))$$

"$\mathbb{Q}_2$"

Απόδ. Ισχ.: • Από Άσκ. 1, οι δυαδικοί αριθμοί ($\frac{p}{2^q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$) είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$ (yes?)

Άρα $\exists (p_n), (q_n)$ στα "$\mathbb{Q}_2$": $p_n \searrow a$, $q_n \nearrow b$

Τότε $(a,b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [p_i, q_i) = \bigcup J_i$

Τώρα, $\forall J_i$ είναι της μορφής

$$\left[\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^m}\right) = \left[\frac{2^m a}{2^{n+m}}, \frac{2^n b}{2^{n+m}}\right)$$

το οποίο είναι προφανώς πεπερ. ένωση διαστημάτων $D(n+m, k)$. (με $k = 2^m a, \dots, 2^n b - 1$) ∎

Steinhaus: $\forall A \in \mathcal{M}_\lambda$ με $\lambda(A)>0$ $\exists \delta>0$:

$$B(0,\delta) \subseteq A - A = \{a-a',\ a,a' \in A\}$$

<u>Απόδ</u> Αρκεί να υποθ. $\lambda(A)<+\infty$

Πράγματι, λόγω εσωτερικής κανονικότητας:

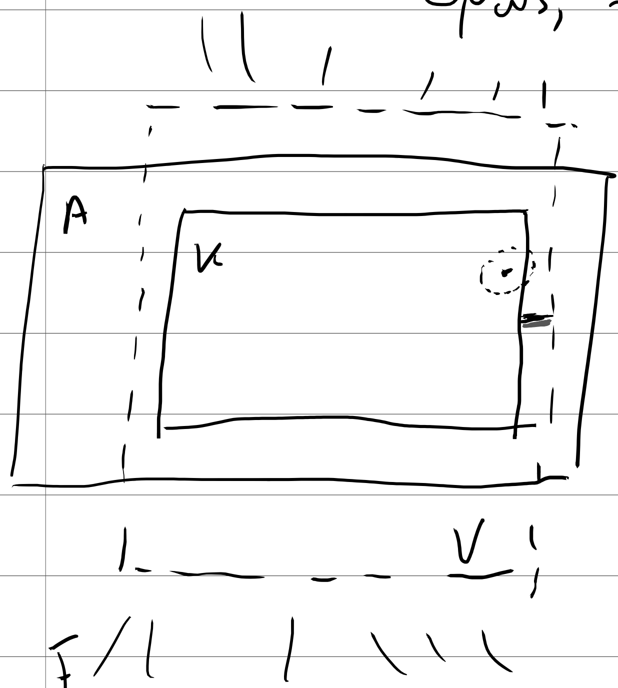
$\lambda(A)=\sup\{\lambda(K) : K\subseteq A$ συμπαγές$\}$

και $\forall K$ συμπ, $\lambda(K)<+\infty$

Παίρνω $K\subseteq A$ συμπαγές με $\lambda(K)>0$

Όμως, λόγω εξωτ. κανονικότητας, $\exists V$ ανοιχτό

με $\underline{V\supseteq K}$ με $\underline{\lambda(V)<2\lambda(K)}$ (1)



Έστω $F=V^c$, K, F ξένα κλειστά, K συμπ.

$dist(K,F)=\delta>0$ (Προφανώς)

οπότε: $\underline{\forall t\in B(0,\delta)}$ και $\forall x\in K$

τότε $x+t\in V$

άρα $K+t\subseteq V$

Επίσης $K\subseteq V$

άρα $K\cup(K+t)\subseteq V$

Επίσης, $K\cap(K+t)\neq\emptyset$

διότι, αν $K\cap(K+t)=\emptyset$

τότε: $\lambda(V)\geq\lambda(K\cup(K+t)) \overset{\text{προσθ}}{=} \lambda(K)+\lambda(K+t) \overset{\text{αναλλ. μεταφ.}}{=} 2\lambda(K)$

άρα $\lambda(V)\geq 2\lambda(K)$ άτοπο από την (1)

<u>Οπότε</u> $\forall t\in B(0,\delta)$ έχουμε $K\cap(K+t)\neq\emptyset$

άρα $\exists\ \underline{x\in K}$ τ.ω. $x\in K+t$

άρα $\exists\ \underline{y\in K} : \underline{x=y+t}$

άρα $t=x-y\in K-K$

$\subseteq A-A$

άρα $B(0,\delta)\subseteq K-K\subseteq A-A$!

Πρότ $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, G$ ανοιχτό $\supseteq A$
τ.ω. $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$

Απόδ ($\Rightarrow$) Πρώτα υποθέτω $\lambda(A) < +\infty$
Από ορ λ^*:
$\forall \varepsilon > 0$ μπορώ $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ανοικτά φρ. διαστ.

$$\text{τ.ω.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \underset{\lambda(A)}{\underset{\parallel}{\lambda^*(A)}} + \varepsilon$$

Θέτω $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$: ανοιχτό, $\supseteq G$

$$\underline{\lambda(A) \le \lambda(G)} \overset{\text{υποπρ}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \underline{\lambda^*(A) + \varepsilon}$$

άρα $\underset{\text{μετρ}}{\lambda^*(G \setminus A)} = \lambda(G \setminus A) \underset{\text{προσθ}}{=} \lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$

διότι
$G = A \underset{\text{ξένα, μετρ}}{\cup} (G \setminus A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(G) = \lambda(A) + \lambda(G \setminus A)$ (αρκεί αν δα μετρήσιμα, $\lambda^*(G) \le \lambda^*(A) + \lambda^*(G \setminus A)$.)

Όταν $\lambda(A) = +\infty$
Ορίζω $\forall n$, $A_n = A \cap [-n, n]$
όπου $\forall A_n \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$, $\lambda(A_n) < +\infty$
και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\forall \varepsilon > 0$

$\forall n \ \exists G_n$ ανοιχτό $\supseteq A_n$: $\lambda(G_n \setminus A_n) < \varepsilon / 2^n$

όπως δείξω $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ αν. $\supseteq A$

και $G \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus A_n)$

$\Downarrow$

$$\lambda(G \setminus A) \underset{\text{υποπροσθ}}{\le} \sum \lambda(G_n \setminus A_n) \le \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Από υπόθ, $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists G_n$ αν $\supseteq A$ ώστε
$\lambda^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$

Θέτω
$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$: G_δ, άρα Borel, άρα μετρήσιμο

και $\lambda^*(B \setminus A) \le \lambda^*(G_n \setminus A) < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
άρα $\lambda^*(B \setminus A) = 0$

$\Downarrow$

άρα $B \setminus A$ είναι σε $\mathcal{M}_{\lambda^*}$

όπως $A = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$
$= B \cap (B \setminus A)^c$

Πόρισμα $\forall A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \ \exists$ Borel (μάλιστα G_δ) $\supseteq A$
ώστε $\lambda(B \setminus A) = 0$

1η αρχή Littlewood

$A \in \mathcal{M}_{\lambda}$, $\lambda(A) < +\infty$ $\epsilon > 0$, ∃ $J_1 \dots J_m$ ανοιχτά + φρ. διαστ. ξένα ανα δύο

$$\lambda(A \Delta J) < \epsilon \quad J = \bigcup_{k=1}^{m} J_k$$

Αποδ. Από ορ.: $\lambda(A) = \lambda^*(A) = \inf\{\sum v(I_n) : A \subseteq \bigcup I_n\}$
I_n: ανοιχτ. φρ. διαστ.

$\forall \epsilon > 0$ ∃ $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \lambda(A) + \epsilon/2 \qquad (1)$$

όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < +\infty$ ∃ $m \in \mathbb{N}$: $\sum_{n>m} \lambda(I_n) < \epsilon/2$ (2)

$$A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{m} I_n\right) \subseteq \bigcup_{n>m} I_n$$

άρα $\lambda\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{m} I_n\right) \le \sum_{n>m} \lambda(I_n) < \epsilon/2$ (3)

Επίσης: $\bigcup_{n=1}^{m} I_n \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A$

$$\Downarrow$$

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{m} I_n \setminus A\right) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A\right) \overset{\text{προσθ}}{=} \lambda\left(\bigcup^{\infty} I_n\right) - \lambda(A)$$

$$\overset{\text{υποπρ}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) - \lambda(A) < \epsilon/2 \qquad (4)$$

οπότε:

$$\lambda\left(A \Delta \left(\bigcup_{n=1}^{m} I_n\right)\right) = \lambda\left(\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{m} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{m} I_n \setminus A\right)\right)$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2$$

Μπορώ να βρω $\{I'_1, I'_2, \dots I'_{m'}\}$ ξένα ανα δύο διαστήματα

ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{m} I_n = \bigcup_{k=1}^{m'} I'_k$$

Προφ. Τα I'_k αναγκαστικά φραγμ., διότι $\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{m'} I'_k\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{m} I_n\right)$ είναι πεπερασμένο, αφού $\lambda(A) < +\infty$, και

$$+\infty > \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{m'} I'_k\right) = \sum_{k=1}^{m'} \lambda(I'_k)$$

(ευχαριστώ!)

Έχω $\lambda\left(A \Delta \left(\bigcup_{k=1}^{m'} I'_k\right)\right) < \epsilon$

όμως, αν θέσω $J_k = (I'_k)^{\circ}$ τότε

$$\lambda(J_k) = \lambda(I'_k)$$

όπου τα $\{J_1 \dots J_{m'}\}$ είναι τώρα ανοιχτά και ξένα και φραγμ.

και $\lambda\left(A \Delta \left(\bigcup_{k=1}^{m'} J_k\right)\right) < \epsilon$

Cantor

$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ καθώς C_n είναι ξένη ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων J_k^n καθένα από τα οποία έχει $\lambda(J_k^n) = \frac{1}{3^n}$

άρα $\lambda(C_n) = 2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

άρα $\lambda(C) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n$

άρα $\lambda(C) = 0$

- C τομή κλειστών άρα κλειστό (: συμπαγές $\subseteq [0,1]$)
- $C^\circ = \emptyset$ διότι C δεν περιέχει κανένα ανοιχτό $\neq \emptyset$ διάστημα, διότι $\forall U \neq \emptyset$ ανοιχτό έχει $\lambda(U) > 0$

$\Downarrow$

"πουθενά πυκνό" ή "αραιό" rare nowhere dense

- Ισχ. C δεν είναι αριθμήσιμο!

$2^{\mathbb{N}} = \{(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sigma_n \in \{0,1\}\}$ ξέρω όχι αριθμήσιμο

(2ο διαγ. επιχείρημα του Cantor)

Θα φτιάξω $f: 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow C$ 1-1 και επί

Ονομάζω διαδοχικά τα διαστήματα:

$C_1 = [0,\frac{1}{3}] = K(0) \cup [\frac{2}{3}, 1] = K(1)$

$C_2 : [0, \frac{1}{3^2}) = K(0,0) \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] = K(0,1)$

σπάει σε $K(1,0) \cup K(1,1)$

σπάει σε $K(0,0,0) \cup K(0,0,1)$ ---

σπάει σε $K(1,1,0) \cup K(1,1,1)$

Επαγωγικό βήμα! αν έχω ονομάσει όλα τα διαστήματα που αποτελούν το C_n: $K(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n)$

σπάω: $K(\sigma_1,\sigma_2,\dots\sigma_n) \to \underbrace{K(\sigma_1,\sigma_2 \dots \sigma_n, 0)}_{\text{αριστερό}} \cup \underbrace{K(\sigma_1,\sigma_2 \dots \sigma_n, 1)}_{\text{δεξί}}$

$\forall \sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ έχω φτιάξει φθίνουσα ακολουθία από κλειστά διαστήματα (: ένα κλαδί)

$K(\sigma_1) \supseteq K(\sigma_1,\sigma_2) \supseteq K(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \dots$ μη κενά, συμπαγή

άρα η $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K(\sigma_1,\sigma_2 \dots \sigma_n) := K_\sigma \neq \emptyset$ (πληρότητα του $\mathbb{R}$!!)

επειδή όμως $diam(K(\sigma_1,\sigma_2 \dots \sigma_n)) = \frac{1}{3^n} \to 0$

άρα K_σ = μονοσύνολο. Το ονομάζω $\{f(\sigma)\}$

Έτσι έφτιαξα:

$f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ που σε κάθε κλαδί που αντιστοιχεί στην $\sigma = (\sigma_n) \in 2^{\mathbb{N}}$ απεικονίζει το μοναδικό στοιχείο του K_σ. Παρατήρησε ότι $f(\sigma) \in C$ διότι $K_\sigma = \bigcap_n K(\sigma_1 \dots \sigma_n) \subseteq \bigcap_n C_n = C$

Οπότε τελικά: $f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow C$

Είναι 1-1: Αν $\sigma \neq \tau$, $\exists$ ελάχιστος n_0 ώστε $\sigma_{n_0} \neq \tau_{n_0}$ από το n_0 και μετά τα κλαδιά δεν ξανασυναντιούνται, άρα δηλ $\forall n \geq n_0$, $K(\sigma_1 \dots \sigma_n) \cap K(\tau_1 \dots \tau_n) = \emptyset$ οπότε $K_\sigma \cap K_\tau = \emptyset$ δηλ $f(\sigma) \neq f(\tau)$.

Επί: $\forall x \in C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ άρα $\forall n$, $x \in C_n = \bigcup K(\sigma_1 \dots \sigma_n)$

Είναι ξένη ένωση, άρα $\forall n$, $\exists!\ \sigma_1 \dots \sigma_n$ τ.ω. $x \in K(\sigma_1 \dots \sigma_n)$

άρα $\exists\ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n, \dots)$ τ.ω. $x \in K_\sigma = \{f(\sigma)\}$

δηλ $x = f(\sigma)$.

Δείξαμε ότι C είναι υπεραριθμήσιμο

Ισχ. Το C είναι τέλειο
(: δεν έχει μεμονωμένα σημεία)

Απόδ. Πάρε οποιο $x \in C$. Θέλω, θα φτιάξω
μια (x_n), $x_n \in C$ και $x_n \neq x$ τ.ω. $x_n \to x$

Ξέρω ότι $x \in \bigcap K(\sigma_1, \sigma_2 \dots)$

$\forall n$, $x \in K(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)$ με διάμετρο $= \frac{1}{3^n} > 0$
μη εκφυλισμένο διάστημα

δύο περιπτώσεις: i) $\exists n$: x αριστερό άκρο του $K(\sigma_1 \dots \sigma_n)$
οπότε $\forall n$ ονομάζω x_n το δεξί άκρο του διαστ.
είναι όλα $x_n \neq x$
$0 < |x_n - x| \leq \frac{1}{3^n}$, $x_n \to x$

Αλλιώς $\forall n$, x δεν είναι αριστερό άκρο του διαστ.
τότε ονομάζω x_n το αριστερό άκρο του διαστ.
πάλι $x_n \neq x$ $\forall n$
και $|x_n - x| \leq \frac{1}{3^n} \to 0$

Απλούστερα $\forall n$, το κλ. διάστημα $K(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)$ έχει δύο (διαφορετικά) άκρα. Κάποιο από αυτά (ή και τα δύο) θα είναι $\neq x$. Ονομάζω λοιπόν x_n ένα άκρο του διαστήματος που $\neq x$ (αν και τα δύο είναι $\neq x$, παίρνω το αριστερό άκρο)

The Devil's staircase:

$\forall n$, δημιουργώ $f_n:[0,1) \to [0,1]$ συνεχή, αύξουσα, επί

σταθερή σε κάθε διάστημα του C_n^c

και το γράφημά της αποτελείται από ευθ. τμήματα.

<u>Παρ.</u> $\forall t \in [0,1]$, $\forall n$

$$|f_n(t) - f_{n+1}(t)| \le \frac{1}{2^n} \quad (\text{γιατί;})$$

δηλ. $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \le \frac{1}{2^n} \quad \forall n$

άρα $\forall m > n$

$$\|f_m - f_n\| = \|(f_n - f_{n+1}) + (f_{n+1} - f_{n+2}) + \dots + (f_{m-1} - f_m)\|_\infty$$

$$\le \|f_n - f_{n+1}\| + \|f_{n+1} - f_{n+2}\| + \dots + \|f_{m-1} - f_m\|$$

$$\le \|f_n - f_{n+1}\| + \|f_{n+1} - f_{n+2}\| \dots \|f_{m-1} - f_m\|_\infty$$

$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{2}{2^n}$$

άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \ \forall m > n \ge n_0$

$$\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

(f_n) είναι βασική ακολουθία στον <u>πλήρη</u> μ.χ. $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$, άρα <u>συγκλίνει</u> σε μια <u>συνεχή</u>:

$f : [0,1] \to [0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

Από Θεωρ. Ενδ. Τιμής, η f είναι <u>επί</u> του $[0,1]$

και αύξουσα γιατί $\forall f_n$ αύξουσα

Επίσης: $f(C) = [0,1]$

διότι: $\forall s \in [0,1]$, $\exists t \in [0,1] : f(t) = s$

όμως f σταθερή σε κάθε διάστημα του C^c (ανοιχτό) (γιατί;) άρα $\exists t' \in C$ ώστε $f(t') = f(t) = s$.

$\Downarrow$

$\lambda(f(C)) = 1$

Επιπλέον, σε κάθε διάστημα J του C^c (ανοιχτό) η $f|_J$ είναι <u>σταθερή</u>, άρα παραγωγίζεται και έχει παράγωγο $= 0$!!

<u>δηλ.</u> η f είναι <u>σχεδόν για</u> κάθε x (<u>δηλ.</u> έξω από ένα σύνολο μέτρου μηδέν, το C) παραγωγίσιμη, με $f'(x) = 0$

Παρόλα αυτά, διαβολοσκαρφαλώνει από το $0 = f(0)$ μέχρι το $1 = f(1)$!!