9 Νοεμ. 2015

Μετρήσιμες Συναρτήσεις

$f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$

$\mathcal{A}$-μετρ $\iff \forall b \in \mathbb{R},\ f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}$

$$\Downarrow (1)$$

" $\qquad f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{A}$

(1) γιατί, $[-\infty, b) = \bigcup_n [-\infty, b - \frac{1}{n}]$

άρα $f^{-1}([-\infty, b)) = \bigcup_n \underbrace{f^{-1}([-\infty, b - \frac{1}{n}])}_{\in \mathcal{A}}$

άρα $\in \mathcal{A}$

Θυμίζω: $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$

f^{-1} σέβεται $\cup$, $\cap$, και $\setminus$

(εύκολη αλλά αναγκαία άσκηση)

$\forall b \in \mathbb{R},\ f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{A} \Rightarrow \forall b \in \mathbb{R},\ f^{-1}([b, +\infty]) \in \mathcal{A}$

Από: πάρε συμπληρώματα!

$$\left(f^{-1}([b, +\infty])\right)^c = f^{-1}\left([b, +\infty]^c\right)$$

$$= f^{-1}([-\infty, b))$$

(Αν $\cancel{\forall b \in \mathbb{R},\ f^{-1}((b, +\infty]) \in \mathcal{A}}$ δεν χρειάζεται!

τότε $\cancel{\forall b \in \mathbb{R},\ f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}}$ (ομοίως))

$\forall b \in \mathbb{R}, \qquad f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathcal{A}$

Είδαμε: $\Downarrow$ ⟵ άμεσο, παίρνοντας συμπλ

$\forall b \quad f^{-1}([b, +\infty]) \in \mathcal{A}$

$$\Downarrow$$

$\forall b \quad f^{-1}((b, +\infty]) \in \mathcal{A}$

$\left(\text{διότι } f^{-1}((b, +\infty]) = \bigcup_{n} f^{-1}\left(\left[b + \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) \in \mathcal{A} \right)$

$$\Downarrow$$

$\forall b, \quad f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}$ (παίρνοντας συμπλ.)

Προτ χ_B είναι $\mathcal{A}$-μετρ $\Longleftrightarrow B \in \mathcal{A}$

Απόδ $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\{x \in X : \chi_B(x) \le b\} = \begin{cases} \emptyset & b < 0 \\ B^c & 0 \le b < 1 \\ X & b \geq 1 \end{cases}$$

άρα: $\in \mathcal{A} \Longleftrightarrow B \in \mathcal{A}$

Προτ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f συνεχής $\Rightarrow$ Borel. Διότι $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{f^{-1}([-\infty, b))}_{\text{ανοιχτό, άρα Borel}} = \underset{\text{συνεχής}}{f^{-1}}(\underset{\text{ανοιχτό}}{(-\infty, b)})$$

άρα, $\forall b \in \mathbb{R}$,

$f^{-1}([-\infty, b))$ είναι Borel άρα η f είναι $\mathcal{B}$-μετρ.

Προτ f Borel μετρ. $\Rightarrow f$ Lebesgue μετρήσιμη

Δηλ Αρκεί ότι $\forall b \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty, b]) = \underline{O}$ είναι $\in \mathcal{M}_{\lambda^*}$

Όμως, αφού η f είναι Borel, το $O \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ άρα $O \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$

συνεχής $\Rightarrow$ Borel $\Rightarrow$ Leb-μετρ

$\not\Leftarrow$

πχ $f = \chi_{[0,1]}$ είναι Borel, αφού $[0,1] \in \mathcal{B}$

αλλά ασυνεχής στο 0 και στο 1

Leb-μετρ $\not\Rightarrow$ Borel μετρ.

Πάρε ένα $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\exists$ τέτοιο σύνολο;; ναι, αργότερα)

τότε χ_A είναι Leb-μετρ όχι Borel μετρ

Προτ. Έχω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα νδο f Borel μετρ.

δηλ: $\forall b \in \mathbb{R}$, νδο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\}$ είναι Borel

Έστω $a = \sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\}$

Δύο περιπτώσεις:

- $f(a) \leq b$ τότε

$$x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a) \Rightarrow f(x) \leq b$$

αντιστρόφως:

$$f(y) \leq b \Rightarrow y \in \{x : f(x) \leq b\} \Rightarrow y \leq a$$

άρα $[-\infty, a] = \{x : f(x) \leq b\} = f^{-1}([-\infty, b])$

άρα είναι Borel

- $f(a) > b$

τότε $x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a) > b \Rightarrow f(x) > b$

αν $f(y) > b \Rightarrow y \notin \{x : f(x) \leq b\} \underset{(\text{γιατί;})}{\Rightarrow} y \geq a$

άρα

$f^{-1}((b, +\infty]) = [a, +\infty]$ άρα πάλι Borel

οπότε και το $f^{-1}([-\infty, b])$ είναι Borel

Προτ Αν $f: X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ $\mathcal{A}$-μετρ

και $C \subseteq X$ τότε $\underset{\underset{g}{\parallel}}{f|_C}$ είναι $\mathcal{A}_C$-μετρ

$\hookrightarrow = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$

Απόδ $\forall b$ νδο $g^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}_C$

$$\overset{\parallel}{\{x \in C \;\; g(x) \leq b\}} = \{x \in C : f(x) \leq b\}$$

$$= \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq b\}}_{\in \mathcal{A}} \cap C$$

Όμως f είναι $\mathcal{A}$-μετρ, άρα:

άρα $g^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}_C$ $\blacksquare$

Προτ $X = \bigcup_n C_n$, $C_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$, , $f|_{C_n}$ είναι $\mathcal{A}_{C_n}$-μετρ

νδο f μετρ

Απόδ $\forall b \in \mathbb{R}$ νδο $f^{-1}([-\infty, b]) \in \mathcal{A}$

$$\{x \in X : f(x) \leq b\} = \bigcup_{n=1} \underbrace{\{x \in C_n : f(x) \leq b\}}_{(f|_{C_n})^{-1}([-\infty, b])}$$

$(\mathcal{A}_{C_n} = \{B \cap C_n : B \in \mathcal{A}\})$

$\uparrow$ $\mathcal{A}_{C_n}$

από υπόθεση,

άρα

$\exists B_n \in \mathcal{A}$ τ.ω

$$(f|_{C_n})^{-1}([-\infty, b]) = B_n \cap C_n$$

Όμως, $C_n \in \mathcal{A}$ άρα $B_n \cap C_n \in \mathcal{A}$

άρα ~~Βρίσκ.~~ η $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ τους $\in \mathcal{A}$ $\blacksquare$

Πρόσ: (X,d) μετρ χώρος ή (X,τ) τοπολ χώρος, $Y\subseteq X$

ΝΔΟ $\mathcal{B}(Y) =$
$$= \{ A\cap Y : A\in\mathcal{B}(X)\}$$

Απόδ • Θυμίζω (προηγουμένως) ότι ένα $V\subseteq Y$ είναι (σχετικά) ανοιχτό $\Longleftrightarrow$ $\exists\, G\subseteq X$ ανοιχτό : $V = G\cap Y$

Θεωρώ $\mathcal{A} = \{ A\subseteq X : A\cap Y \in \mathcal{B}(Y)\}$
περιέχει όλα τα ανοιχτά του X

απόδ. κάθε $G\subseteq X$ ανοιχτό : $G\in\mathcal{A}$
διότι $G\cap Y$ ανοιχτό στο Y
και άρα $\in\mathcal{B}(Y)$

αν δείξω ότι είναι σ-άλγεβρα στο X
έχω τελειώσει
Όμως αυτό είναι εύκολη άσκηση!

άρα: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ και συνεπώς
$$\mathcal{B}(X)_Y = \mathcal{B}(Y)$$

(ii) Αν $f: X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ είναι Borel (ως προς $\mathcal{B}(X)$)
τότε $f|_Y$ είναι Borel (ως προς $\mathcal{B}(Y)$)

Απόδ Έδειξα πριν ότι αν f είναι $\mathcal{B}(X)$-μετρ
τότε $f|_Y$ είναι $\mathcal{B}(X)_Y$-μετρ

όμως $\mathcal{B}(X)|_Y = \mathcal{B}(X)$.
άρα τελείωσα. $\blacksquare$

$(X, \mathcal{A})$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

- f μετρ. $\overset{\text{ορ}}{\iff}$ $\forall b \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \le b\} \in \mathcal{A}$

$$\Downarrow$$

$\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό, $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$

<u>Αποδ</u> G μπορεί να γραφεί ως αριθμ. ένωση

$$G = \bigcup_n (a_n, b_n)$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(G) = \bigcup_n \left(f^{-1}((a_n, b_n)) \right)$$

αρκεί καθώς $f^{-1}((a,b)) =$

$$= \underset{\substack{\mathcal{A} \\ (f \text{ μετρ})}}{\underset{\cap}{f^{-1}([-\infty, b))}} \setminus \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{f^{-1}([-\infty, a])}} .$$

∎

- Έστω $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό, ισχύει $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ τότε $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό ισχύει $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.

<u>Αποδ</u>: $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό, ισχύει $f^{-1}(F) = f^{-1}((F^c)^c)$

$$= \Big(\underbrace{f^{-1}(F^c)}_{\text{αντιστ. εικόνα ανοιχτού, άρα } \in \mathcal{A}}\Big)^c$$

άρα $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ ∎

- Έστω $\forall F \subseteq \mathbb{R}$ <u>κλειστό</u>, ισχύει $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$. Θεωρώ

$$\{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$$

παρατηρώ (α) ότι περιέχει τα κλειστά (υποθ.)
(β) εύκολα βλέπω ότι είναι σ-άλγ. υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

άρα η οικογένεια αυτή περιέχει όλα τα Borel

<u>οπότε</u> $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

- <u>τέλος</u> Αν $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ τότε $\forall b \in \mathbb{R}$, αφού το $(-\infty, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{A}$

<u>δηλ</u> f μετρ. ∎

Ερώτηση $(X, \mathcal{A})$ μετρ. χώρος,
$f: X \to [-\infty, +\infty]$

Έστω $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (Υπ)

Είναι σωστό ότι η f είναι $\mathcal{A}$-μετρ.;;

Ερώτηση β' $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου!
με την (Υπ), ισχύει ότι η f είναι
μ-μετρήσιμη;
(δηλ. ως προς την $\mathcal{A}_\mu$;)

Πρότ. $(X, \mathcal{A})$ μετρ. χώρος, $f, g : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες

Θέτω $B = \{x \in X : f(x) < g(x)\}$.

νδο $B \in \mathcal{A}$.

$$B \overset{(*)}{=} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{x \in X : f(x) < q\}}_{f^{-1}([-\infty, q))} \cap \underbrace{\{y \in X : g(y) > q\}}_{g^{-1}((q, +\infty])}$$

$\uparrow$ αριθμ. (για το $q \in \mathbb{Q}$)

$\in \mathcal{A}$ διότι f μετρ.

$\in \mathcal{A}$ διότι g μετρ.

(*): Πράγματι:

$x \in B \iff f(x) < g(x)$

$\iff \exists\, q \in \mathbb{Q} : f(x) < q < g(x)$

δηλ. $x \in B \iff \exists\, q \in \mathbb{Q} : f(x) < q$ και $g(x) > q$

$x \in B \iff \bigcup_{q \in \mathbb{Q}}$ '' ''

$\blacksquare$

- $\Gamma = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \overset{?}{\in} \mathcal{A}$

NAI, διότι $\Gamma = \{x \in X : f(x) > g(x)\}^c$

- $\Delta = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \overset{?}{\in} \mathcal{A}$

NAI διότι $\Delta = \Gamma \setminus B$

Πρότ. $h = f \vee g$: $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$
αν f, g μετρ. νδο h μετρήσιμη

δηλ. $\forall b \in \mathbb{R}$ νδο $\{x \in X : h(x) \leq b\} \in \mathcal{A}$

Πράγματι, $\{x \in X : h(x) \leq b\} =$

$= \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq b\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x \in X : g(x) \leq b\}}_{\in \mathcal{A}}$ ΟΚ

Πρότ. νδο $\varphi = f \wedge g$: $\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ μετρήσιμη

$\forall b \in \mathbb{R}$,

$\{x : \varphi(x) \leq b\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq b\}}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\{x \in X : g(x) \leq b\}}_{\in \mathcal{A}}$ ▨