Καλημέρα
23/11/2015

$s : X \longrightarrow [0, +\infty]$ απλή μετρ.

$a \geq 0$ νδο $a\int s\,d\mu = \int (as)\,d\mu$ αν $a=0$ (*) τετριμμένο

$$s = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$ σε κανονική μορφή

δηλ $s(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$
$A_k = s^{-1}(\{a_k\})$

$a>0$ τότε $a \cdot s = \sum_k a a_k \chi_{A_k}$ σε κανον. μορφή

όποτε $$\int as\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a a_k \mu(A_k) = a \sum a_k \mu(A_k)$$
$$= a\int s\,d\mu$$

(*) όταν $a=0$ τότε η $as = 0 = 0\chi_X$

άρα $\int as\,d\mu = 0\,\mu(X) = 0$ (διότι έχω συμφωνήσει $0(+\infty)=0$)

s_1, s_2 απλές ≥ 0 μετρ. απλές

$$\int (s_1+s_2)\,d\mu \overset{?}{=} \int s_1\,d\mu + \int s_2\,d\mu$$

$s_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$, $s_2 = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ κανονική μορφή

όπως $\int s_1\,d\mu + \int s_2\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$

$s_1 + s_2 \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{C_k}$ με $\{C_k\}$ διαμέριση και $(s_1+s_2)(X) = \{c_1, \dots, c_N\}$

Όμως $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = X$, ξένη ένωση

$$\Downarrow$$

$\forall A_k = \bigcup_{j=1}^{m} (A_k \cap B_j)$ ξένη ένωση

όμοια $B_j = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B_j)$ $\forall j$

$$\int s_1\,d\mu + \int s_2\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{m} \mu(A_k \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{m} b_j \left(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap B_j) \right)$$

$$= \sum_{k,j} \underbrace{(a_k + b_j)}_{\uparrow} \mu\underbrace{(A_k \cap B_j)}_{\text{ξένα ανά δύο}} \overset{?}{=} \int (s_1+s_2)\,d\mu$$

ξαλ

δεν είναι πάντα $s^{-1}(\{a_k + b_j\}) = A_k \cap B_j$!

Είναι η $s_1 + s_2 = \sum_{k,j} (a_k + b_j) \chi_{A_k \cap B_j}$

Τώρα, από το Λήμμα: (στην επόμενη σελίδα)

$$\sum_{k,j} (a_k + b_j) \mu(A_k \cap B_j) = \int (s_1+s_2)\,d\mu$$

διότι $\{A_k \cap B_j : k = 1 \dots n, j = 1 \dots m\}$

είναι ξένα ανά δύο

δηλαδή $\int (s_1+s_2)\,d\mu = \int s_1\,d\mu + \int s_2\,d\mu$ ■

Λημ. Αν $s=\sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$, $b_j \geq 0$, $B_j \in \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο

τότε $\int s\,d\mu = \sum b_j \mu(B_j)$

Απόδ. Η s, αφού απλή, έχει πεπερασμένο πλήθος τιμών:

$$s(X)=\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

και αφού μετρ.,

$$s^{-1}(\{c_k\}) = A_k \text{ είναι στην } \mathcal{A}$$

οπότε εξ ορισμού:

$$\int s\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k).$$

Επειδή τα $\{A_k\}$ διαμερίζουν το X

$$\forall\ B_j = \bigcup_{k=1}^{n} (B_j \cap A_k).$$

Ισχ. Μπορώ να υποθ. ότι $\{B_j : j=1..m\}$ διαμερ. του X

[**Απόδ.** Έχω $s = \sum b_j \chi_{B_j}$, αν $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = \Gamma \neq X$

τότε ονομάζω $B_0 = \Gamma^c \in \mathcal{A}$
και $b_0 = 0$

οπότε $s = \sum_{j=0}^{m} b_j \chi_{B_j}$ και $\{B_j\}$ είναι διαμερ. του X]

Τώρα, αφού τα $\{B_j\}$ είναι διαμερ.,

$$\forall\ A_k = \bigcup_{j} (A_k \cap B_j)$$

οπότε:

$$\int s\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=0}^{m} \mu(A_k \cap B_j)$$

$$= \sum_{k,j} c_k \mu(A_k \cap B_j)$$ (πέρα όταν $A_k \cap B_j \neq \emptyset$

τότε $c_k = b_j$ διότι: αν $x \in C_k \cap B_j$ τότε έχω:
$s(x) = c_k$ αφού $x \in C_k$ και $s(x) = b_j$ αφού $x \in B_j$)

άρα $$= \sum_j b_j \Big(\underbrace{\sum_k \mu(A_k \cap B_j)}_{\mu(B_j)} \Big)$$

αφού $B_j = \bigcup_k (A_k \cap B_j)$

$$= \sum_j b_j \mu(B_j).$$ ■

Αν $0 \le s_1 \le s_2$ απλές, τότε $\int s_1 \, d\mu \le \int s_2 \, d\mu$

<u>Απόδ</u> $s_2 = s_1 + (s_2 - s_1)$ (και οι δύο προσθ. είναι απλές, ≥ 0)

$\Downarrow$ από την προσθ

$$\int s_2 \, d\mu = \int s_1 \, d\mu + \int (s_2 - s_1) \, d\mu$$

$$\geq \int s_1 \, d\mu \quad \text{διότι} \quad \int (s_2 - s_1) \, d\mu \geq 0$$

$f: X \to [0,+\infty]$ μετρ.

$\emptyset \neq \{\int s\,d\mu : s$ απλή, $0 \le s \le f\} \subseteq [0,+\infty]$

έχει ελάχιστο άνω φρ.

$\int f\,d\mu := \sup\{\int s\,d\mu : s$ απλή, $0 \le s \le f\}$

$a>0$ ισχ. $a\int f\,d\mu = \int af\,d\mu$

Επειδή $\forall s$ απλή, $0 \le s \le f$
ισχύει $0 \le as \le af$

άρα από ορ. του $\int (af)\,d\mu$
ισχύει

$$0 \le \int as\,d\mu \le \int (af)\,d\mu$$
$$\int as\,d\mu = a\int s\,d\mu$$

$\forall s$ απλή: $0 \le s \le f$ ισχύει

$$a\int s\,d\mu \le \int (af)\,d\mu$$

Παίρνοντας sup:

$$a\int f\,d\mu \le \int (af)\,d\mu$$

και κανείς παρόμοια αντίστροφη χρησιμοποιώντας με $\frac{1}{a}$

$$0 \le s \le af$$
$$\Downarrow$$
$$\tfrac{1}{a}s \le f \quad \text{κλπ.}$$

($\exists$ πολύ πιο άμεση απόδειξη από τη σχέση:
$0 \le s \le f \iff 0 \le as \le af$

οπότε
$$\begin{aligned} a\int f\,d\mu &= a\sup\{\textstyle\int s\,d\mu : s \text{ απλή}, 0 \le s \le f\} \\ &= \sup\{a\textstyle\int s\,d\mu \quad " \quad " \} \\ &= \sup\{\textstyle\int (as)\,d\mu : \;", 0 \le as \le af\} \\ &= \sup\{\textstyle\int s'\,d\mu : s' \text{ απλή}, 0 \le s' \le af\} \\ &= \textstyle\int (af)\,d\mu. \;\blacksquare \end{aligned}$$
)

$$0 \le f \le g \Rightarrow \int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$$

<u>Απόδ</u>. Έστω s απλή, $0 \le s \le f$ και $s \le g$ οπότε από ορ για $\int g\,d\mu$ έχω $\int s\,d\mu \le \int g\,d\mu$

(<u>ορ</u> $\int g\,d\mu = \sup\{\int s\,d\mu : s \text{ απλή}, 0 \le s \le g\}$)

<u>άρα</u> $\forall s$ απλή, $0 \le s \le f$ ισχύει $\int s\,d\mu \le \int g\,d\mu$

άρα $\underbrace{\sup\{\int s\,d\mu : 0 \le s \le f \text{ (s απλή)}\}}_{= \int f\,d\mu} \le \int g\,d\mu$ ∎

Τώρα: $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ και $\forall f \ge 0$ μετρ

$$\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu$$

διότι εξ ορισμού $\int_A f\,d\mu = \int f \chi_A\,d\mu$

όμως $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\chi_A \le \chi_B}$ διότι $\forall x \in X$ αν $x \notin A$ τότε $0 = \chi_A(x) \le \chi_B(x)$ και αν $x \in A$ τότε $x \in B$ άρα $\chi_B(x) = 1 \ge \chi_A(x)$

$$\Downarrow$$

$$f\chi_A \le f\chi_B$$

$$\Downarrow$$

$$\int f\chi_A\,d\mu \le \int f\chi_B\,d\mu$$

$$\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu \quad ∎$$

$A \in \mathcal{A}$, $f \geq 0$ μετρ.

$$\left.\begin{array}{c} \mu(A) = 0 \\ \text{ή} \\ f|_A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_A f \, d\mu = 0$$

Αν $f|_A = 0$ τότε $f\chi_A = 0 \Rightarrow \int f\chi_A \, d\mu = 0$ ✓

(διότι $\forall$ s απλή, $0 \leq s \leq f\chi_A = 0$

τότε $s = 0$ άρα $\int s \, d\mu = 0$

$\Rightarrow \sup\{\int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f\chi_A\}$
$= 0$)

Αν $\mu(A) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \int f\chi_A \, d\mu = 0$

Αν s απλή, $0 \leq s \leq f\chi_A$ τότε $\forall x \notin A$ έχω
$s(x) = 0$

άρα $s = s\chi_A$

γράφω $s = \sum a_i \chi_{A_i}$

$\Rightarrow s = s\chi_A = \sum a_i \chi_{A_i} \chi_A = \sum a_i \chi_{A_i \cap A}$

$\Rightarrow \int s\chi_A \, d\mu = \sum a_i \, \underbrace{\mu(A_i \cap A)}_{= 0}$

διότι $\mu(A) = 0$

άρα, αφού αυτό συμβαίνει $\forall s \leq f\chi_A$
$\Downarrow$ sup (ως προς $s \leq f\chi_A$)

$\int f\chi_A \, d\mu = 0$ (δηλ. $\int_A f \, d\mu = 0$)

∎

$f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες

όπως $f+g : X \to [0, +\infty]$,,

Ελέγχω: $\int f d\mu + \int g d\mu \overset{?}{=} \int (f+g) d\mu$

Η εύκολη: Παίρε απλές
$0 \le s_1 \le f$, $0 \le s_2 \le g$

$\Downarrow$

$0 \le s_1 + s_2 \le f+g$

$\Downarrow$

$\int (s_1+s_2) d\mu \le \int (f+g) d\mu$

$\|$ προσθ

$\int s_1 d\mu + \int s_2 d\mu$

Απόδειξη: Αν s_2 απλή, $0 \le s_2 \le g$,

$\forall$ s_1 απλή $0 \le s_1 \le f$ ισχύει

$\int s_1 d\mu \le \int (f+g) d\mu - \int s_2 d\mu$

sup: $\int f d\mu \le \int (f+g) d\mu - \int s_2 d\mu$

δηλ) δηλ $\forall s_2 \le g$ απλή $\int s_2 d\mu \le \int (f+g) d\mu - \int g d\mu$

$\Downarrow$

$\int g d\mu \le$,, ,,

$\Downarrow$

$\int f d\mu + \int g d\mu \le \int (f+g) d\mu$.

= ??

Άλλη μια προσπάθεια:
αφού $\int f d\mu = \sup \{ \dots \}$

Υπάρχει (s_n) ακ. απλές $0 \le s_n \le f$ ώστε
$\int s_n d\mu \to \int f d\mu$

όμοια $\exists$ (s_n') από απλές $0 \le s_n' \le g$
ώστε $\int s_n' d\mu \to \int g d\mu$

όπως $\int s_n d\mu + \int s_n' d\mu \to \int f d\mu + \int g d\mu$

$\|$??

$\int (s_n + s_n') d\mu \to \int (f+g) d\mu$

ΘΜΣ : $f_n \geq 0$ μετρήσιμες, $f_n \to f$ κατά σημείο και (f_n) αύξουσα.

τότε $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$

δηλ $\lim_n \int f_n \, d\mu = \int (\lim f_n) \, d\mu$

Απόδ (i) $\forall x \in X$, $(f_n(x))$ στο $[0,+\infty]$ αύξουσα, άρα το $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\exists$ ''

επίσης, αφού $\forall f_n$ μετρήσιμη, έχω δηλαδή ότι $f := \lim f_n$ μετρήσιμη και ≥ 0

επειδή $f_n \leq f_{n+1} \leq f$

$\Downarrow$ δηλαδή

$$\int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

$\Rightarrow$ $\lim_n \int f_n \, d\mu$ $\exists$ και είναι $\leq \int f \, d\mu$

Μένει νδο $\lim_n \int f_n \, d\mu \geq \int f \, d\mu = \sup\left\{\int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f \text{ απλή}\right\}$

αρκεί, $\forall$ απλή $0 \leq s \leq f$ νδο $\lim_\nu \int f_\nu \, d\mu \geq \int s \, d\mu$ (*)

Σταθεροποιώ s απλή, $0 \leq s \leq f$, θέλω

ιδέα αν $F_n = \{x \in X : f_n(x) \geq s(x)\}$ θα ήθελα $(F_n) \nearrow X$

βελτίωση ιδέας (κόλπο):
Έστω ένα $c \in (0,1)$ και θεωρώ
$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq c s(x)\}$$

παρατ (i) $E_n \in \mathcal{A}$, διότι $f_n - cs$ μετρ

(ii) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$ αφού $(f_n - cs)$ αύξουσα:
αν $x \in E_n$, δηλ. $f_n(x) - cs(x) \geq 0$
τότε $f_{n+1}(x) - cs(x) \geq 0$ δηλ. $x \in E_{n+1}$

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$

Απόδ. Έστω $x \in X$. Αν $s(x) = 0$ τότε

$f_n(x) \geq \underbrace{cs(x)}_{0} \quad \forall n$

άρα $x \in E_n$ ok

Αν $s(x) > 0$ τότε

$f(x) \geq s(x) > cs(x)$ (εδώ!)

άρα, αφού $f_n(x) \to f(x)$,

$\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$

$f_n(x) \geq cs(x)$ δηλ. $x \in E_n$.

Θεωρώ τώρα την συνολο-συνάρτηση

$v : A \to [0, +\infty]$

$A \Rightarrow \int_A s\,d\mu$: είναι μέτρο (!)

(διότι $s = \sum a_n \chi_{A_n}$ άρα

$v(A) = \int_A s\,d\mu = \underbrace{\sum_{n=1}^{n} a_n \underbrace{\mu(A_n \cap A)}_{\text{μέτρο}}}_{\text{μέτρο}}$)

όπως, $E_n \nearrow X \Rightarrow$

$v(E_n) \nearrow v(X)$

Κοιτάω το:

$c\,v(E_n) = c\int_{E_n} s\,d\mu = \int_{E_n} cs\,d\mu \leq \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu$

δηλ. $c\,v(E_n) \leq \int f_n d\mu$

άρα $c\,v(X) \leq \lim_n \int f_n d\mu$

$c\int s\,d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu$

Αφού ισχύει $\forall c < 1$: $\Downarrow$

$\int s\,d\mu \leq \lim_n \int f_n d\mu$