25/11/2015

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{1}{x}\,d\lambda(x) \qquad \big((0,+\infty), \mathcal{B}, \lambda\big)$$

$$\int_0^n \frac{1}{x}\,d\lambda(x) \overset{?}{=} [\log x]_0^n = ??$$

$$\int_{(0,1]} \frac{1}{x}\,d\lambda(x)$$

$\forall \delta>0$, $0<\delta\leq 1$: $\quad R\int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_\delta^1 = 0-\log\delta$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\delta\to 0} R\int_{[\delta,1]} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

Υποψιάζομαι ότι: $0<\delta\leq 1$! $\quad R\int_\delta^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_{[\delta,1]} \frac{1}{x}\,d\lambda(x)$

τότε μάλλον φαίνεται σωστό ότι

$$\int_{(0,1]} \frac{1}{x}\,d\lambda(x) = +\infty$$

$f: X \to [0, +\infty]$ μετρ.

$s_n(X) \subseteq \mathbb{R}$

(i) $\exists (s_n) \nearrow$ απλές μετρ. $0 \le s_n \le f$ ώστε $s_n \to f$ κ.σ.

(ii) $\forall (s_n') \nearrow$ μετρ, $0 \le s_n' \le f$ με $s_n' \to f$ κσ

ισχύει:

$$\int s_n' \, d\mu \to \int f \, d\mu$$

Μπορώ: $\int f \, d\mu = \lim \int s_n \, d\mu$

για όποια ακολουθία απλών μετρ $(s_n) \nearrow f$

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για ∫ για Riemann:

<u>Παράδ.</u> $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\} \cap [0,1]$ μια αρίθμ.

$$f_n = \chi_{\{q_1 \dots q_n\}} \qquad f_n \le f_{n+1} \quad \text{και}$$

Riemann ολοκλ. (ασυν. πεπερ. πλήθος ασυνεχ.)

$$\int_0^1 f_n = 0 \quad \forall n$$

$$f_n \to \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} \text{ κ.σ.}$$

όμως η $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ <u>δεν</u> είναι R-ολοκλ.

(2) (f_n) R-ολοκλ., $(f_n) \nearrow$ <u>και</u> $\lim f_n = f$: R-ολοκλ.

$$\overset{?}{\Rightarrow} \int f_n \to \int f \quad \text{~~<u>όχι</u> ∃ παράδ.~~}$$

ΛΑΘΟΣ!

Δες 30/11!

Πρτ $f, g : X \to [0, +\infty]$ μετρ, τότε

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu \quad (\in [0,+\infty])$$

Απόδ Υπάρχουν $(s_n), (s_n')$ αύξουσες ≥ 0 απλές μετρ

$s_n \nearrow f$, $s_n' \nearrow g$ (έχουμε δείξει)

$\Downarrow$ ΘΜΣ

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int s_n\,d\mu,$$

$$\int g\,d\mu = \lim_n \int s_n'\,d\mu$$

όμως, $\underbrace{(s_n + s_n')}_{\substack{\text{απλές} \\ \text{μετρ} \\ \geq 0}} \nearrow$, $s_n + s_n' \to f+g$ κ.σ.

$\Downarrow$ ΘΜΣ

$$\int (s_n + s_n')\,d\mu \to \int (f+g)\,d\mu$$

όμως $\quad \|$ έχουμε δείξει

$$\int s_n\,d\mu + \int s_n'\,d\mu$$

άρα $\int (f+g)\,d\mu = \lim_n \int (s_n + s_n')\,d\mu$

$$= \lim_n \left(\int s_n\,d\mu + \int s_n'\,d\mu \right)$$

$$= \int f\,d\mu + \int g\,d\mu \quad \blacksquare$$

6. Beppo Levi (ή Fubini-το)

$f_n \geq 0$ μετρ τότε

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu \qquad (\in [0,+\infty])$$

Απόδ. Θέτω $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ μετρ, ≥ 0

$$(g_n) \nearrow g =: \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

από προσθ. $\int g_n d\mu = \int \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k d\mu$

$$\text{ΘΜΣ} \downarrow \qquad\qquad \downarrow n\to\infty$$

$$\int g\, d\mu \quad \overset{\text{άρα}}{=} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu$$

Παράδ. $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$

μ = απαριθμ. μέτρο

τότε $f : X \to [0,+\infty]$ είναι μια ακολουθία (όλες είναι μετρ.)

$$\int f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

Beppo Levi: αν (f_n), $f_n \geq 0$

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \underset{\text{δηλ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(k)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_n(k)\right)$$

Αρλ. Αν $a_{kn} \geq 0$ τότε $\sum_k \sum_n a_{kn} = \sum_n \sum_k a_{kn}$

Fubini: Για δύο μέτρα μ, ν στους X, Y:

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

$\qquad \parallel$ ΥΠΟ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ!

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

Fatou : $f_n \geq 0$ μετρ τότε:

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$$

Θυμίζω $g_n := \inf\{f_k : k \geq n\}$: αύξουσα διότι

$$\{f_k : k \geq 1\} \supseteq \{f_k : k \geq 2\} \supseteq \{f_k : k \geq 3\}$$
$$g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \cdots$$

Απόδ Fatou:

Θέτω $g = \lim_n g_n = \liminf_n f_n$

$$\int \left(\liminf f_n\right) d\mu = \int \left(\lim g_n\right) d\mu \overset{\text{ΘΜΣ}}{=} \lim_n \int g_n \, d\mu$$

όμως: $g_n \leq f_k \quad \forall k \geq n$

$$\Downarrow$$

$$\int g_n \, d\mu \leq \int f_k \, d\mu \quad \forall k \geq n$$

$$\Downarrow$$

$$\int g_n \, d\mu \leq \inf_{k \geq n} \left\{ \int f_k \, d\mu \right\} \quad \forall n$$

άρα:

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \left(\int f_k \, d\mu \right) = \liminf_n \int f_n \, d\mu \quad \blacksquare$$

$f \geq 0$ μετρ, ορίζουμε $\forall A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu := \int f\chi_A\,d\mu$$

Ισχ ν είναι μέτρο στο $(X, \mathcal{A})$

δηλ

$$\nu(\emptyset) = 0 \quad \text{και } \sigma\text{-προσθ.}$$

Απόδ προφανώς $\nu(\emptyset) = \int f\chi_\emptyset\,d\mu = \int 0\,d\mu = 0$

σ-προσθ : (A_n) $A_n \in \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

νδο :

$$\nu(A) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int f\chi_A\,d\mu = \sum \int f\chi_{A_n}\,d\mu$$

όμως, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$, $\Rightarrow \chi_{A_n} + \chi_{A_m} = \chi_{A_n \cup A_m}$

$$\Downarrow$$

$$\chi_A = \chi_{\cup A_n} \underset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$$

Απόδ (*): $\forall x \in X$: γιατί ή $\exists A_m$ ώστε $x \in A_m$ (μόνο σε ένα A_n) (α)
ή $\forall A_n$, $x \notin A_n$ (β)

(α): $\chi_{\cup A_n}(x) = 1$, $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)}_{\text{ίσα}} = \chi_{A_m}(x) = 1$

(β) $\chi_{\cup A_n}(x) = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = 0 + 0 + 0 \ldots = 0$

Τώρα από (*) : $f\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{A_n}$

$$\Downarrow \text{B. Levi}$$

$$\int f\chi_A\,d\mu = \sum \int f\chi_{A_n}\,d\mu$$

δηλ : $\nu(A) = \sum_n \nu(A_n)$. ■

• $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)=0 \Rightarrow \nu(A)=0$

$\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ $\qquad\Rightarrow \int_A f\,d\mu = 0$

• $\forall g : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη

$$\int g\,d\nu \overset{?}{=} \int g f\,d\mu$$

Απόδ (Κλασσική μέθοδος!)

(i) Έστω $g = \chi_A$, $A \in \mathcal{A}$ τότε

$$\int g\,d\nu = \nu(A)$$

ισχύει η ισότητα εξ ορισμού

$$\int g f\,d\mu = \int \chi_A f\,d\mu = \int_A f\,d\mu$$

(ii) Έστω $g = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}$, $a_n \geq 0$ τότε από "γραμμικότητα"

$$\int g\,d\nu = \sum_{n=1}^{N} a_n \int \chi_{A_n}\,d\nu \overset{(i)}{=} \sum_{n=1}^{N} a_n \int \chi_{A_n} f\,d\mu$$

$$\overset{\text{"γρ"}}{=} \int \Big(\sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}\Big) f\,d\mu = \int g f\,d\mu$$

(iii) Γενική περίπτωση: $g \geq 0$ μετρ, $\exists$ ακολουθία (s_n) απλές μετρ, $s_n \nearrow g$

ΘΜΣ για το μέτρο ν:

$$\int g\,d\nu = \lim_n \int s_n\,d\nu \overset{(ii)}{=} \lim_n \int s_n f\,d\mu$$

όμως $(s_n f) \nearrow$ μετρ, $s_n f \nearrow g f$

άρα, από ΘΜΣ για το μ

$$\int s_n f\,d\mu \to \int g f\,d\mu$$

άρα: $\int g\,d\nu = \int g f\,d\mu$.

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu$$ δυνάμεις

$f \geq 0$

$\nu << \mu$

(i) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

(ii) $\forall g \geq 0$

$$\int g\,d\nu = \int g f\,d\mu$$

λέμε στο $[0,1]$, λ

$A = [0, x]$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

γενικά γράφω $\frac{d\nu}{d\mu} := f$

$\Downarrow$ Θεμ. Θεωρ. Απειρ.

$$\int g\,d\nu = \int g \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$$

$$\exists \ \frac{dF}{dx} = f$$

$\Rightarrow$

$$\int g(t)\,dF(t) = \int g(t) F'(t)\,dt$$

$$= \int g(t) f(t)\,dt$$

ΠΡΟΜΠΛΕΜ! Έστω $\nu << \mu$

πότε $\exists f : X \to [0, +\infty]$ μετρ. ώστε

$\forall A \in \mathcal{A}$: $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ δηλ. $f = \frac{d\nu}{d\mu}$;;

ΟΤΑΝ ΙΣΧΥΕΙ το θεώρημα RADON-NIKODYM

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

f λέγεται μ-<u>μετρήσιμη</u> αν $\forall b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \le b\} \in \mathcal{A}_\mu$

ισοδύναμα, $\forall b \in \mathbb{R}$

$\exists\, E, F \in \mathcal{A}$; $\mu(F \setminus E) = 0$ τ.ω

$E \subseteq \{x \in X : f(x) \le b\} \subseteq F$.

Έστω f μ-μετρ. , Έστω $g : X \to [-\infty, +\infty]$ που είναι μ-σχεδόν παντού $= f$

$\Downarrow$?

g είναι επίσης μ-μετρ

Τι θα πει $g = f$ μ-σχ.π. ($g(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε x)

$\Updownarrow$

$\{x \in X : g(x) \neq f(x)\}$ μ-αμελητέο (μ-μηδενικό)

$\Updownarrow$

$\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ ώστε:

$\{x \in X : g(x) \neq f(x)\} \subseteq A$

<u>Ισχ</u> g είναι μ-μετρ

<u>Απόδ</u> Έστω $b \in \mathbb{R}$ νδο $\{x \in X : g(x) \le b\} \in \mathcal{A}_\mu$

Όμως, το $G_b = \{x \in X : (x) \le b\}$ διαφέρει από το

$F_b = \{x \in X : f(x) \le b\}$ κατά ένα σύνολο μ-μηδενικό

$F_b \triangle G_b$ είναι μ-μηδενικό σύνολο

άρα $\bar{\mu}(F_b \triangle G_b) = 0$

άρα, αφού $F_b \in \mathcal{A}_\mu$ εξ υποθέσεως έπεται ότι $G_b \in \mathcal{A}_\mu$.

(γιατί $G_b \setminus F_b \subseteq G_b \triangle F_b$ άρα $\bar{\mu}(G_b \setminus F_b) = 0$ οπότε $G_b \setminus F_b \in \mathcal{A}_\mu$)