30/11/2015

ΧΡΟΝΙΑ ΠΟΛΛΑ ΣΤΟΝ ΑΝΔΡΕΑ!

Διορθώσεις:

(α) Ερώτηση: ΘΜΣ για Riemann;

<u>ΟΧΙ</u> <u>πχ</u> $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$, $f_n = \chi_{\{q_1, \dots, q_n\}}$

$$f_n \nearrow \chi_{\mathbb{Q}}$$

↑

Riemann ολ. σίγουρα με $\int f_n = 0$

αλλά $\chi_{\mathbb{Q}}$ όχι R-ολοκλ.

Τι γίνεται αν επιπλέον $f \in \mathcal{R}$ (<u>δηλ</u> R-ολοκλ.)

<u>δηλ</u> $0 \le f_n \le f_{n+1}$, $f_n \in \mathcal{R}$

και $f_n \to f$ κ.σ.

και $f \in \mathcal{R}$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \int f_n \to \int f$$

Βεβαίως ισχύει γιατί

$R\int f_n = \int f_n \, d\lambda$ (έχουμε δείξει)

Όπως, αφού $f \in \mathcal{R}$ επίσης

$$R\int f = \int f \, d\lambda = \lim \int f_n \, d\lambda$$

↑

ΘΜΣ!

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου:

(β) Αν f είναι μ-μετρ τότε $\exists h$ $\mathcal{A}$-μετρ ώστε $f = h$ μ-σπ

<u>Ορισ</u> $f = h$ μ-σπ. $\iff \exists A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ τ.ω $\forall x \notin A$ να ισχύει $f(x) = h(x)$

. f είναι μ-μετρ. <u>δηλ</u> $\forall b \in \mathbb{R}$ το σύνολο
$$F_b = \{x \in X : f(x) \le b\} \in \mathcal{A}_\mu$$

δηλ. υπάρχουν: $E_b \subseteq F_b \subseteq G_b$ όπου $E_b, G_b \in \mathcal{A}$ και $\mu(G_b \setminus E_b) = 0$

οπότε μπορώ:
$$F_b = \underset{\uparrow \mathcal{A}}{E_b} \cup \underbrace{(F_b \setminus E_b)}_{\mu\text{-μηδεν}} \quad : \text{ξένη ένωση}$$

Όπως, $\forall b \in \mathbb{Q}$ μπορώ: $F_b = E_b \cup N_b$ όπου N_b μ-μηδεν

ορίζω $N = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} N_b$ ← μ-μηδεν $\Rightarrow$ N είναι μ-μηδεν
αριθμ

υπάρχει $M \in \mathcal{A}$, $\mu(M) = 0$: $M \supseteq N$

ορίζω $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin M \\ 0 & ; x \in M \end{cases}$?

ή $h = f \chi_{M^c}$

προφανώς: $h = f$ σχεδόν παντού

Μένει νδο h είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη

νδο: $H_b := \{x \in X : h(x) \le b\} \in \mathcal{A}$ $\quad \forall b \in \mathbb{R}$
αρκεί $\forall b \in \mathbb{Q}$

$$H_b = (H_b \cap M^c) \cup (H_b \cap M)$$

$$H_b \cap M^c = \{x \in M^c : h(x) \le b\} = \{x \in M^c : f(x) \le b\} = M^c \cap (E_b \cup N_b)$$
$$= M^c \cap E_b \in \mathcal{A} \quad (\text{διότι } N_b \subseteq M)$$

$$H_b \cap M = \{x \in M : h(x) \le b\} \quad \begin{matrix} \text{αν } b < 0 & = \emptyset \\ b \ge 0 & = M \end{matrix} \Bigg\} \in \mathcal{A}$$

$$H_b = (\underset{\uparrow \mathcal{A}}{H_b \cap M^c}) \cup (\underset{\uparrow \mathcal{A}}{H_b \cap M})$$

■

Άλλη Απόδειξη:

(1) περίπτωση: $f = \chi_F$

(2) περίπτωση $f = \sum c_n \chi_{F_n}$

(3) περίπτωση: γενική

(1) $\chi_F \in A_\mu \iff F \in A_\mu \iff \exists\, E, G \in A$ ώστε $E \subseteq F \subseteq G$ και $\mu(G \setminus E) = 0$

όπως $\chi_F = \chi_E + \chi_{F \setminus E}$

$\uparrow$ μετρήσιμη, αφού $E \in A$

και $\chi_F = \chi_E$ σχεδόν παντού διότι $F \setminus E \subseteq G \setminus E$ που έχει μ μηδέν

(2) $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{F_k}$ μπορώ $\forall k$ να βρω g_k μετρήσιμη ώστε $\chi_{F_k} = g_k$ σχεδόν παντού

Θέτω $g = \sum^{n} c_k g_k$

τότε g μετρήσιμη και

$$f - g = \sum^{n} c_k (\chi_{F_k} - g_k) = 0 \text{ σχεδόν παντού}$$

(3) Γράφω $f = f_+ - f_-$. Αρκεί να το δείξω για τις f_+ και f_- χωριστά.

Δηλ. αρκεί να υποθέσω $f \geq 0$

Τώρα ξέρω ότι $\exists (f_n)$ απλές A_μ-μετρήσιμες $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \to f$ κ.σ.

$\forall n$, $\exists\, g_n$ A-μετρήσιμη ώστε $f_n = g_n$ σ.π.

Δηλ. $\exists\, M_n \in A$ με $\mu(M_n) = 0$ ώστε $f_n(x) = g_n(x)$ $\forall x \notin M_n$

$f(x) = \lim_n f_n(x)$, f_n A_μ-μετρ

" $g(x) = \lim_n g_n(x)$ " g_n A-μετρ

τότε g A-μετρ ως όριο A-μετρ

$g = f$ στο M^c, όπου $M = \bigcup M_n$ οπότε $\mu(M) = 0$

Έχω τελειώσει, ΑΝ το όριο $\lim_n g_n(x)$ υπάρχει

Ξέρω ότι το όριο υπάρχει όταν $x \in M^c$ (τότε $(g_n(x)) = (f_n(x))$ που συγκλίνει)

Δηλ. υπάρχει μ-σχεδόν $\forall x \in X$!

ΑΣΚΗΣΗ: Αν (g_n) ακολουθία από μετρήσιμες και $\exists \lim_n g_n(x)$ ΣΧΕΔΟΝ $\forall x$ τότε υπάρχει μία μετρήσιμη συνάρτηση g ώστε $g = \lim g_n$ σχεδόν παντού

Markov $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος π.θ

$f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ τυχαία μεταβλητή

τότε $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{P}[f \geq t] \leq \frac{1}{t} \mathbb{E}(f)$$

δηλαδή $f : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμη

τότε $\forall t \geq 0$

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f \, d\mu$$

Απόδ. Έστω $A = \{x \in X : f(x) \geq t\}$

τότε

$$0 \leq t\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \text{ δηλ } f(x) < t \\ t, & x \in A \text{ δηλ } f(x) \geq t \end{cases} \leq f(x) \quad \forall x$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \underbrace{\int t\chi_A \, d\mu}_{= t\mu(A)} \leq \int f \, d\mu$$

τελειώσαμε

Πρόταση $f \geq 0$ μετρ.:

$$\int f\,d\mu < +\infty \Rightarrow A = \{x : f(x) = +\infty\} \text{ έχει } \mu(A) = 0$$

Απόδ. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x : f(x) \geq n\}}_{A_n}$ $(A_n) \downarrow$

Markov

$\mu(A_n) \leq \frac{1}{n} \int f\,d\mu$ όπως αν $\int f\,d\mu < +\infty$

τότε $\mu(A_n) < +\infty$

και μάλιστα

$\mu(A_n) \to 0$

όπως, είναι $(A_n) \downarrow$

$$\mu(A) = \lim \mu(A_n) = 0 \quad \blacksquare$$

Πρότ. $f \geq 0$ μετρ.:

$f = 0$ σ.π. $\Longleftrightarrow \int f\,d\mu = 0$

Απόδ. $(\Rightarrow)$: $f = 0$ σ.π. σημαίνει ότι αν

$B = \{x \in X : f(x) > 0\}$

τότε $\mu(B) = 0$

έχω $f = f\chi_B$ άρα

$$\int f\,d\mu = \int f\chi_B\,d\mu = \int_B f\,d\mu = 0 \text{ διότι } \mu(B) = 0$$

$(\Leftarrow)$ Υποθέτω ότι $\int f\,d\mu = 0$ $(f \geq 0)$

Θυμίζω ότι αν f συνεχής συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ από επιχείρημα τοπολογικό

$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ $\quad B_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$

$(B_n) \nearrow$ άρα $\mu(B) = \lim \mu(B_n)$

$$\mu(B_n) \leq \frac{1}{1/n} \int f\,d\mu = n \underbrace{\int f\,d\mu}_{\| 0} = 0$$

άρα $\mu(B) = \lim \mu(B_n) = 0$

Πρότ. Αν $\int f\,d\mu < +\infty$ τότε $\{x \in X : f(x) > 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο

(δηλ. Αριθμήσιμη ένωση συνόλων πεπερασμένου μέτρου) (Άσκηση!)

$f \in \mathcal{L}_1 \overset{\text{ορ}}{\iff} f$ μετρ και $\int |f| \, d\mu < +\infty$

$\iff f_+$ και $f_- \in \mathcal{L}_1$ [Αν $B = \{x : f(x) \geq 0\}$ τότε $f_+ = f\chi_B$, $f_- = -f\chi_{B^c}$]

δείξη:

$|f| = f_+ + f_-$ οπότε αν $f \in \mathcal{L}_1$ τότε

(f_+, f_- μετρ. και).

$\int f_+ \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < +\infty$

ομοίως,

$\int f_- \, d\mu < +\infty$

αντιστρόφως: αν f_+ και $f_- \in \mathcal{L}_1$ τότε

(i) $f = f_+ - f_-$ μετρήσιμη

και

(ii) $\int |f| \, d\mu = \int (f_+ + f_-) \, d\mu$

$= \int f_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu < +\infty$

άρα $f \in \mathcal{L}^1$

(i) $\mathcal{L}_1$ είναι γραμμ. χώρος:

$f, g \in \mathcal{L}_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

$f + \lambda g$ μετρήσιμη

και

$|f+\lambda g| \le |f| + |\lambda||g|$

$\Downarrow$

$\int |f+\lambda g| \, d\mu \le \int (|f| + |\lambda||g|) \, d\mu$

$\| \;$ προσθ

$\int |f| \, d\mu + \int |\lambda g| \, d\mu$

$\| \;$ θετ. ομογ

$\underbrace{\int |f| \, d\mu}_{<+\infty} + |\lambda| \underbrace{\int |g| \, d\mu}_{<+\infty} < +\infty$

άρα $\mathcal{L}_1$ γραμμ. χώρος

νδο $\int : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική απεικόνιση

(i) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_1$

Έχουμε $f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-)$ όπου όλες ≥ 0 μετρ

$\|$

$h = h_+ - h_-$

$h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-$

$\Downarrow$ $\int$ και χρησιμοποιώ προσθ για ≥ 0 συναρτ

$\int h_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu + \int g_- \, d\mu = \int f_+ \, d\mu + \int g_+ \, d\mu + \int h_- \, d\mu$

$\Downarrow$ (όλα τα $\int$ματα είναι $<+\infty$)

$\underbrace{\int h_+ \, d\mu - \int h_- \, d\mu}_{\int h \, d\mu} = \underbrace{\int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu}_{\int f \, d\mu} + \underbrace{\int g_+ \, d\mu - \int g_- \, d\mu}_{\int g \, d\mu}$ ∎

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ νδο $\int \lambda f \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$

ψιλ. προσοχής

Λύση:

$\lambda \geq 0$ τότε $\lambda f = \lambda f_+ - \lambda f_-$
$= (\lambda f)_+ - (\lambda f)_-$

άρα $\int \lambda f \, d\mu = \int (\lambda f_+) \, d\mu - \int (\lambda f_-) \, d\mu$

$\|$

$\lambda \int f_+ \, d\mu - \lambda \int f_- \, d\mu$

$= \lambda \int f \, d\mu$

Τώρα αρκεί νδο

$\int (-f) \, d\mu = -\int f \, d\mu$

$f = f_+ - f_-$

όμως, $-f = f_- - f_+$

και

$(-f)_+ = f_-$

$(-f)_- = f_+$

άρα $\int (-f) \, d\mu \overset{\text{ορ}}{=} \int (-f)_+ \, d\mu - \int (-f)_- \, d\mu$

$= \int f_- \, d\mu - \int f_+ \, d\mu$

$= -\left(\int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \right)$

$= -\int f \, d\mu.$ ∎

Πρότ. Έστω γρ. χώρο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$, η απεικόνιση

$$\int : \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

είναι γραμμική και $\underset{\geq}{\text{θετική}}$ δηλ.

$$f \geq 0 \text{ στο } \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}} \Rightarrow \int f \, d\mu \geq 0$$

Πορ. $f, g \in \mathcal{L}^1$ με $f \leq g$ τότε $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Απόδ. $g = (g - f) + f$

άρα

$$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int \underbrace{(g - f)}_{\geq 0} d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\int (g - f) \, d\mu \geq 0$$

οπότε $\int g \, d\mu \geq \int f \, d\mu$

Πρότ. Αν $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$ τότε $\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$

Απόδ. (i) $-|f| \le f \le |f|$

$\Downarrow$ $\int$ντας και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του $\int$ους

$$\int (-|f|)\,d\mu \le \int f\,d\mu \le \int |f|\,d\mu$$

$$\|$$

$$-\int |f|\,d\mu \le \int f\,d\mu \le \int |f|\,d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu . \blacksquare$$

Απόδ.(ii) $\exists\, \lambda : |\lambda| \underset{\mathbb{C}}{=} 1$ τ.ω. $\left|\int f\,d\mu\right| = \lambda \int f\,d\mu =$

$= \int (\lambda f)\,d\mu$ όμως $\lambda f \le |\lambda f|$ $(*)$

άρα

$$\int (\lambda f)\,d\mu \le \int |\lambda f|\,d\mu = \int |f|\,d\mu$$

οπότε $\left|\int f\,d\mu\right| = \int (\lambda f)\,d\mu \le \int |f|\,d\mu . \blacksquare$

Πες τώρα ότι f παίρνει μιγαδικές τιμές

τότε $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$

Η $(*)$ δεν έχει νόημα, όμως ξέρω ότι

$$\int (\lambda f)\,d\mu = \left|\int f\,d\mu\right| \in \mathbb{R}$$

άρα $\|$

$$\mathrm{Re}\left(\int \lambda f\,d\mu\right) = \int \mathrm{Re}(\lambda f)\,d\mu$$

γιατί;

$$\le \int |\lambda f|\,d\mu = \int |f|\,d\mu$$

αφού $\mathrm{Re}(\lambda f) \le |\lambda f|$ $\blacksquare$.

Θ. Κυριαρχ. Σύγκλ. | (f_n) μετρ., $f_n \to f$ κατά σημείο
τιμές στο $[-\infty, +\infty]$
και $\exists\, g$ ολοκληρώσιμη, ≥ 0, που $|f_n| \leq g$ $\forall n$

- όπου $\forall n$ $\int |f_n|\, d\mu \leq \int g\, d\mu < +\infty$
άρα κάθε $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$

- αφού $|f_n| \leq g \Rightarrow |f| \leq g$
άρα $\int |f|\, d\mu \leq \int g\, d\mu < +\infty$
άρα $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$

- νδο $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$
(αφού ολοκληρ.)
$\Longleftrightarrow \int (f_n - f)\, d\mu \to 0$ όμως $f_n - f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$

Επειδή $\left| \int (f_n - f)\, d\mu \right| \leq \int |f_n - f|\, d\mu$

<u>Αρκεί</u> νδο $\int \underbrace{|f_n - f|}_{\geq 0}\, d\mu \to 0$

(πάμε στις διαφάνειες)

<u>Άρα</u> $g_n \geq 0$ μετρ., $g_n \downarrow g \overset{?}{\Rightarrow} \int g_n d\mu \to \int g d\mu$

όχι πάντα (προσ. ?)

Αλλά, αν επιπλέον $\exists\, n_0$ ώστε

$$\int g_{n_0} d\mu < +\infty$$

τότε ναι.

<u>Απόδ</u> Θεωρώ

$$h_n = g_{n_0} - g_n \quad (n \geq n_0)$$

μετρήσιμη,

≥ 0

και $(h_n) \nearrow$ και $\lim h_n = g_{n_0} - \lim g_n$

$= g_{n_0} - g$

από ΘΜΣ, $\int h_n d\mu \to \int (g_{n_0} - g) d\mu$

$$\int (g_{n_0} - g) d\mu = \int g_{n_0} d\mu - \int g d\mu$$

(διότι τώρα <u>ξέρω</u> ότι $g_{n_0}, g \in \mathcal{L}^1$)

άρα $\int (g_{n_0} - g_n) d\mu \to \int g_{n_0} d\mu - \int g d\mu$

$$\int (g_{n_0} - g_n) d\mu = \int g_{n_0} d\mu - \int g_n d\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\int g_n d\mu \to \int g d\mu. \quad \blacksquare$$