Θεωρία Μέτρου

5/10/2015

Παράδ. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{ A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \, , \, I_k : \text{διαστ} \}$

= πεπερ. ενώσεις διαστημάτων

I = διάστημα = $(a,b), [a,b), (a,b], [a,b]$

$$-\infty \le a \le b \le +\infty$$

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$, πχ $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$

- τομή δύο τέτοιων είναι τέτοιο;

  (i) I, J διαστήματα : $I \cap J$ = διαστ ή κενό οκ

  (ii) $A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \, , \quad B = \bigcup_{\lambda=1}^{m} J_\lambda \quad \in \mathcal{A}$

  $$\Rightarrow \quad A \cap B = \bigcup_{k,\lambda} \big(\underbrace{I_k \cap J_\lambda}_{\text{διαστ ή κενό}} \big)$$

  = πεπερ ένωση διαστ. οκ

- Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$

  Απόδ. Εύκολη.

άρα η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα

Δεν είναι όμως σ-αλγ

πχ : $A_n = \{n\} = [n,n] \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ όχι $\underset{?}{\text{πεπερ}}$ ένωση διαστημάτων

Έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ να δείξω ότι $\exists\ \sigma(\mathcal{F})$

- $\exists$ μία σ-αλγ που $\supseteq \mathcal{F}$: $\mathcal{P}(X)$

- θέτω $\sigma(\mathcal{F}) = \{ A \subseteq X : A \in \mathcal{A}\ \ \forall \mathcal{A}$ σ-αλγ που $\supseteq \mathcal{F} \}$

δηλ

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \left\{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ σ-αλγ που } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{F} \right\}$$

κάθε τομή σ-αλγεβρών <u>είναι</u> σ-αλγ

άρα η $\sigma(\mathcal{F})$ <u>είναι</u> σ-αλγ
και $\supseteq \mathcal{F}$

επίσης αν $\mathcal{A}$ είναι σ-αλγ και $\supseteq \mathcal{F}$
τότε $\mathcal{A} \supseteq \sigma(\mathcal{F})$
γιατί η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι η τομή
όλων...

Τα σύνολα Borel:

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{T})$ $\qquad \forall F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό είναι $\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

διότι F^c ανοικτό άρα $F^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

- $\sigma(\mathcal{C}) \supseteq \Delta_1$ $\quad$ δηλ. $\forall (-\infty, b] \in \sigma(\mathcal{C})$

διότι $(-\infty, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, b]$

(όπου $[a,b] = \emptyset$ αν $a > b$)

και $\forall [-n, b] \in \mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$

$\Downarrow$

άρα $(-\infty, b] \in \sigma(\mathcal{C})$

- $\sigma(\mathcal{C}) \supseteq \sigma(\Delta_1)$

- $\sigma(\Delta_1) \supseteq \Delta_2$ $\quad$ δηλ. $\forall (a,b] \in \sigma(\Delta_1)$

$$(a,b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c = \{x : x \leq b \text{ και } x \nleq a\}$$

οκ

$\Downarrow$

- $\sigma(\Delta_1) \supseteq \sigma(\Delta_2)$
- $\sigma(\Delta_2) \supseteq \Delta_3$ $\quad$; $\forall (a,b) \overset{?}{\in} \sigma(\Delta_2)$

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\Delta_2)$$

- $\sigma(\Delta_2) \supseteq \sigma(\Delta_3)$

- Τέλος πρέπει νδο $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ανήκει στην $\sigma(\Delta_3)$ που παράγεται από ανοικτά και φραγμένα διαστήματα.

Αρκεί νδο $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, $U \in \sigma(\Delta_3)$

Όμως, $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό γράφεται $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$

(Πρόταση)

άρα οκ.

Προτ. $A \subseteq B$, $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $\mu(A) \le \mu(B)$

Απόδ. $B = A \cup (B \setminus A)$: και τα δύο $\in \mathcal{A}$ και είναι ξένα

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

(: πεπερ. προσθετικό)

$$\Rightarrow \mu(B) \geq \mu(A) \quad \blacksquare$$

μόνο αν $\mu(A) < +\infty$

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A)$$

αν $\mu(A) = +\infty$, τότε από μονοτονία, $\mu(B) = +\infty$
όμως $\mu(B \setminus A)$ μπορεί να είναι $< +\infty$
(πχ $A = [1, +\infty)$, $B = [0, +\infty)$)
μπορεί να είναι και $+\infty$
(πχ $A = [1, +\infty)$,
$B = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$)

Υποπροσθετ.: $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$, θέλω να είναι:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \left(\text{στο } \in [0,+\infty]\right)$$

Απόδ. Ξενικοποιώ τα A_n!

$D_1 = A_1$, $D_2 = A_2 \setminus A_1$ κλπ

τότε $D_n \in \mathcal{A}$ και επίσης, $D_n \subseteq A_n$ $\forall n$

από ορισμό, $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}_{\text{ξένα ανά δύο}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

και το μ είναι σ-προσθ.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \overset{D_n \subseteq A_n}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$\| $$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \text{OK}$$

<u>Πρόταση</u> Αν $(X, \mathcal{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, και

(A_n) αύξουσα ακολ. στην $\mathcal{S}$

τότε $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$$

(το lim υπάρχει στο $\mathbb{R}$ ή $= +\infty$)

<u>Απόδ</u> Αφού $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \Rightarrow \mu(A_n) \leq \mu(A_{n+1})$

άρα $\lim \mu(A_n)$ υπάρχει

όμως, αν ορίσω τα D_n όπως πριν

τότε τα D_n είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup A_n = \bigcup D_n$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \overset{\sigma\text{-προσθ}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(D_n) \quad (D_n \text{ ξένα ανά δύο})$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} D_n\right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \mu(A_N) \text{ διότι } (A_n) \nearrow$$

∎

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου

$A_n \in \mathcal{S}$, φθίνουσα: $A_n \supseteq A_{n+1} \ \forall n$

Αν $\exists n_0 : \mu(A_{n_0}) < +\infty$ τότε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

<u>Απόδ</u> • $(A_n) \downarrow$ ⇒ $(\mu(A_n))$ φθίν, $(\mu(A_n))_{n \geq n_0}$ φραγμ. ≥ 0

άρα $\lim_{n \geq n_0} \mu(A_n) \in [0, +\infty)$

άρα $\lim_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \in [0, +\infty)$

ορίζω $B_n = A_{n_0} \setminus A_n$, $n \geq n_0$

$= A_{n_0} \cap (A_n)^c$

και αφού $\mu(A_{n_0}) < +\infty$

$\mu(B_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)$

$(B_n) \nearrow$ από πριν $\mu(B_n) \to \mu\left(\bigcup^{\infty} B_n\right)$

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(A_{n_0} \cap \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n^c\right)\right)$$

$$= \mu\left(A_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n\right)$$

$$\Rightarrow \mu(A_n) \to \mu\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

αφού $(A_n) \downarrow$ ∎

$(X, \mathcal{A})$ μετρ. χώρος, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ πεπ. προσθ.

Έστω ότι $\forall (A_n) \nearrow$ $(A_n \in \mathcal{A})$ ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mu(A_n)$$

τότε μ μέτρο

Απόδ. Αρκεί νδο σ-προσθετικότητα

: $\forall (B_n)$, $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ για $n \neq m$

νδο

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

Θέτω $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ ξέρω $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := B$

από υποθ : $\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)$$

$$\overset{\text{πεπ}}{\underset{\text{προσθ}}{=}} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

Έστω μ πεπ. προσθετ., νδο μέτρο με την υποθ. ότι όταν $(A_n)\downarrow\emptyset$ τότε $\mu(A_n)\to 0$

<u>Απόδ</u> Μου δίνεται $B_n\in\mathcal{A}$, $B_n\cap B_m=\emptyset$ $\forall n\neq m$ νδο

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n).$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n := B$$

$$C_n = B\setminus \bigcup_{k=1}^{n_0-1} B_k = \bigcup_{k=n_0}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$$

$$(C_n)\downarrow \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$$

από υποθ, $\mu(C_n)\to 0$

όμως, $B = B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{n-1}\cup \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$

δηλ $B = \bigcup_{m=1}^{n-1} B_m \cup C_n$ ξένα ανά δύο

πεπ. προσθ $\Rightarrow$

$$\mu(B) = \sum_{m=1}^{n-1}\mu(B_m) + \mu(C_n)$$

όμως $\mu(C_n)\to 0$ όταν $n\to\infty$

άρα

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\mu(B_m) + 0$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\mu(B_m). \qquad \blacksquare$$

Παρ/ξ Στο $\mathbb{R}$, το μέτρο Lebesgue λ

($\acute{o}\pi o \upsilon$ $\lambda([a,b]) = b-a$)

δεν είναι βέβαια πεπερασμένο

όμως:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n] \quad \text{και} \quad \underset{2n}{\overset{\parallel}{\lambda([-n,n])}} < +\infty$$

: σ-πεπερ

$\Longleftrightarrow$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1) \quad : \underset{\Sigma}{\underline{\text{ξένα ανά δύο}}}$$

και $\lambda([n,n+1)) = 1 < +\infty$

Γενίκευση του σ-πεπ:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται <u>αναλύσιμος</u>

αν $\exists \{A_i : i\in I\} \subseteq \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο

$\mu(A_i) < +\infty \ \forall i$

και

$$\mu(X) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$$

<u>ορ</u> $\sum_{i\in I} \mu(A_i) = \sup\{ \sum_{i\in F} \mu(A_i) : F \subseteq I \text{ πεπ.}\}$

ή αλλιώς!

$$\mu(X) = \sup\{ \mu(\bigcup_{i\in F} A_i) : F\subseteq I \text{ πεπ.}\}$$

(να το δούμε στις ασκήσεις!)

Υπενθύμιση: Αν $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-ολοκλ. και $f = 0$ εκτός από 1 σημείο

τότε $\int_0^1 f = 0$

δηλ. τα μονοσύνολα δεν ενδιαφέρουν στο $\int$μα

ούτε τα αριθ. σύνολα

= έχουν "μήκος" μηδέν

Θέλουμε όμως να ανήκουν στο σύνολο των "μετρήσιμων" συνόλων.

Αυτή είναι η ιδέα της "πλήρωσης" ενός χώρου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$:

"Συμπληρώνω" την $\mathcal{A}$ βάζοντας και όλα τα υποσύνολα συνόλων που έχουν μέτρο $= 0$

$\mathcal{A}_\mu = \{ A \subseteq X : \exists\, E \subseteq A \subseteq F,\ E, F \in \mathcal{A},\ \mu(F \setminus E) = 0 \}$

είναι σ-άλγ και $\supseteq \mathcal{A}$

- $\mathcal{A}_\mu \supseteq \mathcal{A}$ προφανώς ; πάρε $E = A = F$

- $A \in \mathcal{A}_\mu \overset{?}{\Rightarrow} A^c \in \mathcal{A}_\mu$ ✓

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, E, F \in \mathcal{A} \\ E \subseteq A \subseteq F \\ \mu(F \setminus E) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F^c, E^c \in \mathcal{A} \\ F^c \subseteq A^c \subseteq E^c \\ \mu(E^c \setminus F^c) = \mu(F \setminus E) = 0 \end{array}$$

- σ-άλγεβρα: $A_n \in \mathcal{A}_\mu,\ n \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$\forall n,\ \exists\, E_n, F_n \in \mathcal{A},\ \mu(F_n \setminus E_n) = 0 : E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$

Θέτω $E = \bigcup E_n \in \mathcal{A}$

$F = \bigcup F_n$ " υπολ. $E \subseteq A \subseteq F$

$$\mu(F \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \right)$$

$$\overset{(?)}{\leq} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus E_n) \right) \overset{\text{υποπρ}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \setminus E_n)$$

$$\parallel$$
$$0$$

(?) : $x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right)$!

$\exists\, n : x \in F_n$ και $\forall m,\ x \notin E_m$

$\Rightarrow \exists\, n : x \in F_n \setminus E_n$ άρα $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus E_n)$

$\overset{\mu\sigma\nu}{\Longrightarrow}$ η (?) ισχύει

Έδειξα ότι $\mathcal{A}_\mu$ σ-άλγ και $\supseteq \mathcal{A}$

ορίζουμε $\forall A \in \mathcal{A}_\mu$: $\overline{\mu}(A) = \sup\{ \mu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A \}$
$\in [0, +\infty]$

- $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ προφανώς
  διότι αν $A \in \mathcal{A}$, τότε
  $\sup\{ \mu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A \} = \mu(A)$

- $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ (διότι $\mu(\emptyset) = 0$

- $\overline{\mu}$ είναι σ-προσθ.

Παίρνω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}_\mu$ και $A_n \cap A_m = \emptyset$ για $n \neq m$

ν.δ.ο. $\bar{\mu}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$

$\forall n$, $\exists E_n, F_n \in \mathcal{A}$ με $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$

$E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$

και $\mu(E_n) = \bar{\mu}(A_n)$ (γιατί;;)

αφού A_n ξένα ανά δύο, $E_n \subseteq A_n$
επίσης ξένα ανά δύο
άρα αν $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$$

$$\mu(E) = \bar{\mu}(A)$$

(διότι $\bigcup F_n = F$, $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$)

άρα είναι σ-προσθ.

Πρτ: $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο.

Αποδ:

Πότε λέγεται $N \subseteq X$ $\bar{\mu}$-μηδενικό;
όταν $\exists A \in \mathcal{A}_\mu$, $N \subseteq A$ και $\bar{\mu}(A) = 0$

$\Downarrow$

$\exists E, F \in \mathcal{A}$, $E \subseteq A \subseteq F$ με $\mu(F \setminus E) = 0$
και μπορώ, αφού $\bar{\mu}(A) = 0$, να
πάρω $E = \emptyset$
οπότε έχω $\underset{\in \mathcal{A}}{\emptyset} \subseteq N \subseteq A \subseteq \underset{\in \mathcal{A}}{F}$

$\mu(F \setminus \emptyset) = 0$
και συνεπώς $N \in \mathcal{A}_\mu$