12/10/2015

Θεώρημα μοναδικότητας

Πρώτη περίπτωση: μ, ν πεπερ, $\mu(X) = \nu(X)$

Ξέρω: $\exists\, \Delta \subseteq \mathcal{A} : \sigma(\Delta) = \mathcal{A}$, Δ: $\cap$-κλ

(δηλ $A, B \in \Delta \Rightarrow A \cap B \in \Delta$)

$$\mu|_\Delta = \nu|_\Delta \overset{?}{\Longrightarrow} \mu(A) = \nu(A) \ \forall A \in \sigma(\Delta) = \mathcal{A}$$

<u>Αποδ</u> Θέτω $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$ ← Είναι σ-άλγ?

Θέλω νδο $\mathcal{D} = \mathcal{A}$

Ξέρω $\Delta \subseteq \mathcal{D}$ και ότι $\mathcal{D}$ = κλάση Dynkin

νδο $\mathcal{D} \supseteq \sigma(\Delta)$ $\quad \mathcal{D} \supseteq \delta(\Delta) \overset{\Theta 4}{=} \sigma(\Delta) = \mathcal{A}$

αρκεί νδο $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα

(διότι τότε, $\Delta \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \underset{\mathcal{A}}{\underset{\parallel}{\sigma(\Delta)}} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ οκ)

αυτό λέγεται κλάση Dynkin

- $X \in \mathcal{D}$ διότι από την υπόθ $\mu(X) = \nu(X)$
- $A, B \in \mathcal{D}$, $B \supseteq A$ τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$

  διότι: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (διότι μ πεπ.)

  $\nu(B \setminus A) = \nu(B) - \mu(A)$ άρα $=$
- A, $\{A_n\} \subseteq \mathcal{D}$ $(A_n) \nearrow$ τότε $\bigcup A_n \in \mathcal{D}$

  περίπτωση: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{\text{ξέρω}}{=} \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Για να είναι το $\mathcal{D}$ σ-άλγ, μένει νδο $\mathcal{D}$ είναι $\cap$-κλ (κλειστό ως προς πεπ. τομές) ⊛

<u>Ορ</u> Κλάση Dynkin είναι κάθε $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ που ικανοποιεί αυτές τις 3 ιδιότητες

Εύκολη Άσκηση: Τομή κλάσεων Dynkin είναι κλάση Dynkin.

συνεπώς, $\forall\, \Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ υπάρχει η μικρότερη κλάση Dynkin που $\supseteq \Delta$

λέγεται $\underline{\delta(\Delta)}$

⊛ Γιατί τότε, αν $A, B \in \mathcal{D}$ θα έχω $A^c, B^c \in \mathcal{D}$ άρα $A^c \cap B^c \in \mathcal{D}$ άρα $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{D}$, άρα κλειστό και ως προς πεπ. ενώσεις. Τώρα, αν $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}$, θέτω $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Μόλις έδειξα ότι $\forall B_n \in \mathcal{D}$. Όμως $(B_n) \nearrow$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$. Αλλά $\bigcup B_n = \bigcup A_n$ άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ οπότε είναι σ-άλγεβρα.

μου χρειάζεται!

Θεωρ Αν $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι $\cap$-κλ τότε $d(\Delta)=\sigma(\Delta)$

Απόδ

(i) $\Delta \subseteq d(\Delta)$ (ii) $d(\Delta)$ είναι κλάση Dynkin
άρα για να δείξω ότι $d(\Delta)=\sigma(\Delta)$
αρκεί νδο ότι $d(\Delta)$ είναι σ-αλγ
τι λείπει; νδο $d(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς πεπ. τομές.

νδο $A, B \in d(\Delta) \Rightarrow A\cap B \in d(\Delta)$ $(*)$

Ιδέα: θέτω $\widetilde{d(\Delta)}=\{A\subseteq X : B\in d(\Delta) \Rightarrow A\cap B\in d(\Delta)\}$

αρκεί νδο (1) $\Delta \subseteq \widetilde{d(\Delta)}$
(2) $\widetilde{d(\Delta)}$ είναι Dynkin

διότι τότε $\widetilde{d(\Delta)} \supseteq d(\Delta)$ (αφού (1) και $d(\Delta)$ η μικρότερη)

$\Updownarrow$

$\forall A\in d(\Delta)$ τότε $A\in\widetilde{d(\Delta)}$ οπότε
$\forall B\in d(\Delta) \Rightarrow A\cap B\in d(\Delta)$

Γενικότερα: Αν $\mathcal{P}\subseteq d(\Delta)$, ορίζω

$$\widetilde{\mathcal{P}}=\{A\subseteq X : [B\in\mathcal{P} \Rightarrow A\cap B\in d(\Delta)]\}$$

Ισχ. $\widetilde{\mathcal{P}}$ κλάση Dynkin:

(i) $X\in\widetilde{\mathcal{P}}$ διότι $\forall B\in\mathcal{P} \Rightarrow X\cap B=B$ άρα $\in d(\Delta)$

(ii) $A, C\in\widetilde{\mathcal{P}}$, $A\supseteq C$ τότε νδο $A\setminus C\in\widetilde{\mathcal{P}}$, δηλ:
$\forall B\in\mathcal{P}$, $(A\setminus C)\cap B\in d(\Delta)$

Πράγματι $\overset{\overset{(*)}{\|}}{(A\cap B)\setminus(C\cap B)} \in d(\Delta)$

(iii) Αν $\{A_n\}\subseteq\widetilde{\mathcal{P}}$ με $(A_n)\nearrow$ νδο $\forall B\in\mathcal{P}$

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\cap B \in d(\Delta)$$

Πράγματι: $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B)$

και $A_n\cap B\in d(\Delta)$, $(A_n\cap B)\nearrow$

Συμπεραίνω
• $\widetilde{d(\Delta)}$ κλάση Dynkin (βάζε $\mathcal{P}=d(\Delta)$)
• $\Delta\subseteq\widetilde{d(\Delta)}$

διότι αν $A\in\Delta$ τότε $B\in\Delta \overset{\text{υπόθ}}{\Rightarrow} A\cap B\in\Delta$

δηλ $\Delta\subseteq\widetilde{\Delta}$! κλάση Dynkin

άρα $d(\Delta)\subseteq\widetilde{\Delta}$

δηλ $\forall B\in d(\Delta)$ τότε $B\in\widetilde{\Delta}$ δηλ $\forall A\in\Delta$
$B\cap A\in d(\Delta)$

δηλ $\forall A\in\Delta$ και $\forall B\in d(\Delta)$ ισχύει $A\cap B\in d(\Delta)$

δηλ $\Delta\subseteq\widetilde{d(\Delta)}$

άρα $\Delta\subseteq\widetilde{d(\Delta)}$: κλάση Dynkin

$\Rightarrow$ $\sigma(\Delta)=d(\Delta)$ ∎

Άσκηση: $(A\setminus C)\cap B=(A\cap B)\setminus(C\cap B)=(A\cap B)\setminus C$!

Γεν. περίπτ.: Υπόθ. $\mu|_{\Delta} = \nu|_{\Delta}$, ; $\cap$ κλ

και $\exists \{D_n\} \subseteq \Delta$: • $(D_n) \nearrow$

• $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = X$

• $\mu(D_n) < +\infty \ \forall n$

$\overset{\shortparallel}{\nu(D_n)}$

Συμπ. $\mu(A) = \nu(A) \ \forall A \in \mathcal{A}$

Απόδ. Θέτω $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu_n : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$

$\mu_n(A) = \mu(A \cap D_n)$

; μ_n είναι μέτρο

(Ασκ 2.1)

και $\nu_n(A) = \nu(A \cap D_n)$

Παρατηρώ: (i) $\forall D \in \Delta$, $\mu_n(D) = \mu(D \cap D_n)$ $(D \cap D_n \in \Delta)$

$\shortparallel$

$\nu_n(D) = \nu(D \cap D_n)$

δηλ. $\mu_n|_{\Delta} = \nu_n|_{\Delta}$

(ii) $\mu_n(X) = \mu(X \cap D_n) = \mu(D_n)$

$\nu_n(X) = \qquad \nu(D_n) < +\infty$

άρα, από την προηγούμενη περίπτωση (πεπερ. μέτρα)

$\Rightarrow \mu_n(A) = \nu_n(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Έστω $A \in \mathcal{A}$, οπότε $A = A \cap X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap D_n)$

σ-προσθ. $(A \cap D_n) \nearrow$

$\Rightarrow \mu(A) \overset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap D_n)$

$= \lim_n \mu_n(A)$

$= \lim_n \nu_n(A)$

$\shortparallel \leftarrow$ σ προσθ.

$\nu\left(\bigcup (A \cap D_n)\right)$

Δηλ. $\mu = \nu$ $\qquad = \nu(A)$

∎

Ερώτηση: Πέρα από σ-πεπερ;;

Μέτρο Lebesgue (!!!)

<u>Πρόβλημα</u>: να ορίσω "μήκος" τυχόντος συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ (αν μπορώ) λ^*

- $I = (a,b)$ θέλω $\lambda^*((a,b)) = b - a$

- $A \subseteq \mathbb{R}$ οποιοδήποτε. Μπορώ να βρω (γενικά) ανοιχτά + φραγμένα διαστήματα
$$I_n = (a_n, b_n)$$
ώστε
$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ (ενδεχομένως με επικαλύψεις)}$$
οπότε θέλω
για κάθε τέτοια κάλυψη: $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ όπου $I_n = (a_n, b_n)$

<u>Ορισμός</u> $\forall A \subseteq X$ θέτω:
$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \quad I_n = (a_n, b_n)$$
$$\in [0, +\infty]$$

<u>Πρότ</u>
- $\lambda^*(\emptyset) = 0$
- $A \subseteq B \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ (μονοτονία)
- $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$ (σ-υποπροσθετικότητα)

<u>Απόδ</u>. • $\lambda^*(\emptyset)$ θέλω νδο $\lambda^*(\emptyset) \leq \varepsilon$ για οποιονδήποτε θετικό ε

όμως: $\emptyset \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ ← να μια κάλυψη του $\emptyset$

από τον ορισμό:
$$\lambda^*(\emptyset) \leq (2\varepsilon)$$
αλλά το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν άρα $\lambda^*(\emptyset) = 0$

- $A \subseteq B$ νδο $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$

$\forall$ κάλυψη: $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$

έχω: $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$

$\Rightarrow \inf\left\{\sum (b_n - a_n) : B \subseteq \bigcup (a_n, b_n)\right\}$

$\geq \inf\left\{\sum (b'_n - a'_n) : A \subseteq \bigcup (a'_n, b'_n)\right\}$

$\Rightarrow \lambda^*(B) \geq \lambda^*(A)$

• (A_n) οποιαδήποτε, θέτω $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

νδο: $\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$

$$\lambda^*(A_n) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^n - a_k^n) \ : \ A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^n, b_k^n) \right\}$$

Αν μου δώσουν ε>0 ($\forall n$) μπορώ κάλυψη $A_n \subseteq$ " ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k^n - a_k^n) < \lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \quad (1)$$

(ορισμός infimum)

Κάθε

$$A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^n, b_k^n)$$

οπότε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k^n, b_k^n)$

αριθμ. ένωση ανοιχτ. διαστ.

άρα από τον ορισμό του $\lambda^*(A)$

$\lambda^*(A) \leq$ το άθροισμα των μηκών αυτών

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k^n - a_k^n)\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) \quad (\text{από την } (1))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \epsilon$$

επειδή το ε>0 ήταν τυχαίο, ΟΚ

Πρότ. Αν $a<b$ τότε

$$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*([a,b)) = \lambda^*((a,b])$$
$$= \lambda^*((a,b)) = \underline{b-a}$$

Δεν είναι προφανές !!

Απόδ. Πρώτα το $[a,b]$:

<u>ορ</u>: $\lambda^*([a,b]) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : [a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n) \right\}$

Πρώτον, $\underline{\forall \varepsilon>0}$ $[a,b] \subseteq (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$

$$\Rightarrow \lambda^*([a,b]) \leq (b+\varepsilon-(a-\varepsilon))$$
$$= b-a+2\varepsilon$$

άρα $\lambda^*([a,b]) \leq b-a$

Για την αντίστροφη, πάρε $(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}) \subseteq [a,b]$
από μονοτονία

$$\lambda^*((a+\tfrac{1}{n}, b-\tfrac{1}{n})) \leq \lambda^*([a,b])$$

$\|$
??? Δεν προχωράει

Για την ισότητα $\lambda^*([a,b]) = b-a$
πρέπει νδο:

$\underline{\forall}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n) \supseteq [a,b]$ (2)

να ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n) \geq b-a$

αρκεί νδο: $\exists m\in\mathbb{N} : \sum_{n=1}^{m}(b_n-a_n) \geq b-a$

Όμως $[a,b]$ είναι συμπαγές (!!!)

άρα το αν. κάλ. (2) <u>έχει</u> πεπ. υποκάλυμμα
άρα $\exists m\in\mathbb{N}$:

$$\bigcup_{n=1}^{m}(a_n,b_n) \supseteq [a,b]$$

και θέλω νδο $\sum_{n=1}^{m}(b_n-a_n) \geq b-a$

Θα το δείξω με επαγωγή στο πλήθος m των I_n που η ένωσή τους καλύπτει το $[a,b]$

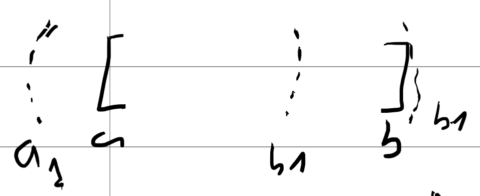
$(m=1)$: αν $[a,b] \subseteq (a_1,b_1)$ τότε προφανώς

$$b-a \le b_1 - a_1 .$$

(Επαγ. βήμα)

<u>Υποθ.</u> Οποτεδήποτε καλύψω ένα $[x,y]$ από k το πλήθος ανοιχτά διαστήματα (a_j,b_j) ισχύει $\sum_{j=1}^{k}(b_j-a_j) \ge y-x$.

Θέλω να δω ότι αν $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{k+1}(a_n,b_n)$



τότε $b-a \le \sum_{n=1}^{k+1}(b_n-a_n)$

μπορώ να υποθέσω $a_1 < a < b_1$ (why?) (porqué?)

Δύο περιπτώσεις:

- $b_1 \ge b$ τότε $(a,b) \subseteq (a_1,b_1]$ άρα $b-a \le b_1-a_1 \le \sum (b_n-a_n)$
- $b_1 < b$ τότε, το υπόλοιπο $[b_1,b] \subseteq \bigcup_{n=2}^{k+1}(a_n,b_n)$; <u>πλήθος $=k$</u>

άρα, από την επαγωγική υπόθεση,

$$b-b_1 \le \sum_{n=2}^{k+1}(b_n-a_n)$$

άρα:
$$\begin{aligned} b-a &\le b-b_1+b_1-a \le \\ &\le (b-b_1)+(b_1-a_1) \\ &\le \sum_{n=1}^{k+1}(b_n-a_n). \quad \blacksquare \end{aligned}$$