19/10/2015

Το εξωτ. μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$

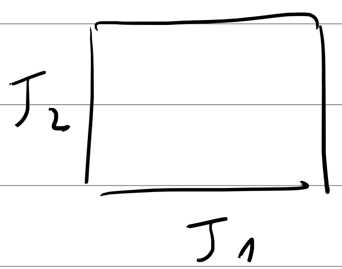
$\mathbb{R}$: διαστήματα

$\mathbb{R}^d$: κουτιά ή διαστήματα

$I = \prod_{n=1}^{d} J_n$ = καρτεσιανό γινόμενο d-διαστημάτων όπου $J_n \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα

$d=2$ $\quad I = J_1 \times J_2$ $\quad J_1, J_2$ διαστήματα

ανοιχτά, κλειστά, τίποτε από τα δύο, φραγμ., μη φραγμ.



(το I μπορεί να οριστεί μέσω μιας μερικής διάταξης στον $\mathbb{R}^d$)

<u>Ορισμός</u> όγκος (ή μήκος, ή εμβαδόν)

$$v(I) = \lambda^*(J_1)\lambda^*(J_2)\cdots\lambda^*(J_d)$$

όπου συμφωνούμε: $0(+\infty)=0$

$I = |$ $\quad v(I)=0$

<u>Ορισμός</u> $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζω

$$\lambda_d^*(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) : I_n \subseteq \mathbb{R}^d \text{ αν. + φρ. διαστ. με } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big\}$$

νδο λ_d^* είναι όντως εξωτ. μέτρο

η μόνη μη τετριμμένη είναι η σ-υποπροσθ.

<u>δη</u> $\lambda_d^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d^*(A_n)$

<u>ίδια απόδειξη</u> με την περίπτωση $d=1$

Πρόταση Αν $K \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ένα συμπαγές διάστημα τότε

$$\lambda^*(K) = v(K)$$

δηλ. αν $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$ τότε:

$$\lambda^*(K) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d).$$

Απόδ. (i) η ανισότητα $\lambda^*(K) \le v(K)$ ισχύει (καλύπτω με ένα ανοιχτό διάστημα ε-πιο μεγάλο)

Για την αντίστροφη, αρκεί να δω $v(K)$ είναι ένα κάτω φράγμα του συνόλου $\left\{ \sum v(I_j) : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \,,\ I_j \text{ ανοιχτ. διαστ.} \right\}$

δηλ. ∀ αριθμ. κάλυψη

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{όπου ανοιχτ. διαστ.}$$

$$v(K) \le \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j)$$

από συμπάγεια (!) $\exists m \in \mathbb{N}$:

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

οπότε αρκεί να δω $v(K) \le \sum_{j=1}^{m} v(I_j)$

Δείξω ότι αν $K \subseteq \bigcup^{m} I_j$

τότε $v(K) \leq \sum_{j=1}^{m} v(I_j)$

<u>Απόδ</u> με επαγωγή στο πλήθος m

Για $m=1$: $K \subseteq I_1 \Rightarrow v(K) \leq v(I_1)$

προφανώς

Επαγωγικό βήμα:

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει όταν καλύπτω με λιγότερα από m διαστ.

Έστω ότι $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$

Τα ξεχωριστά: $E_1 = I_1$, $E_2 = I_2 \setminus I_1$ ...

$E_j = I_j \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} I_i\right)$

x 1 γιατί;

- Κάθε E_j μπορεί? να γραφτεί ως <u>πεπ</u> ένωση ξένων ανά δύο ~~ορ~~ φρ διαστημάτων

Αριθμώ όλα αυτά: $\{J_t : t=1,2,\dots,\lambda\}$

<u>προφ</u> αυτά είναι ξένα ανά δύο, γιατί τα E_j είναι ξένα ανά δύο

Έχω

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j = \bigcup_{j=1}^{m} E_j = \bigcup_{t=1}^{\lambda} J_t \ (\leftarrow \text{ξένη ένωση})$$

$$K = \bigcup_{t=1}^{\lambda} (K \cap J_t)$$ κάθε $K \cap J_t$ είναι (φρ) διάστημα, ξένα ανά δύο

x 2 γιατί;

άρα

$$v(K) = \sum_{t=1}^{\lambda} v(K \cap J_t) \quad (\text{γιατί!;;})$$

$$\leq \sum_{t=1}^{\lambda} v(J_t)$$

Όμως

$$\bigcup_{t=1}^{\lambda} J_t = \bigcup_{j=1}^{m} I_j$$

$$= \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcup \{J_t : J_t \subseteq I_i\} \right)$$

Εδώ:

$$\bigcup \{J_t : J_t \subseteq I_i\} \subseteq I_i$$

άρα, $\sum \{v(J_t) : J_t \subseteq I_i\} \leq v(I_i)$

άρα $\sum_{j=1}^{m} \left(\sum \{ v(J_i) : J_t \subseteq I_i \} \right) \leq \sum_{j=1}^{m} v(I_i)$

άρα $\sum_{t=1}^{\lambda} v(J_t) = \uparrow \leq \sum_{j=1}^{m} v(I_i)$

άρα έχω δείξει: $v(K) \leq \sum_{j=1}^{m} v(I_j)$ το οποίο ήθελα να δείξω

Μένει νδο τα δύο *1 και *2

Λήμμα (1) Η οικογένεια Δ των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που είναι πεπ. ενώσεις ξένων ανά δύο διαστημάτων είναι άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$

(2) Αν I_i, $i=1..n$ ξένα ανά 2 διαστήματα και J διάστημα

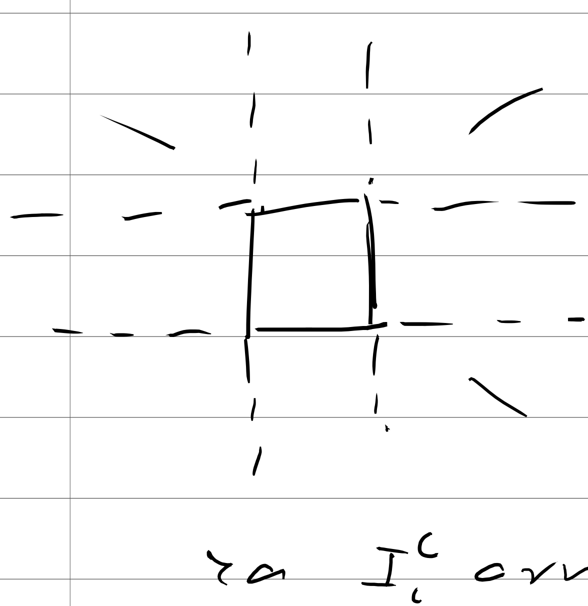
με
$$\bigcup I_i \subseteq J$$
τότε
$$\sum v(I_i) \leq v(J)$$
αν επιπλέον
η $\bigcup I_i = I$ τύχει να είναι διάστημα τότε ισχύει
$$\sum v(I_i) = v(I)$$

Απόδ του (1) Προφανώς $\Delta \neq \emptyset$ (υπάρχει ένα διάστημα...)
Επίσης, αν $A, B \in \Delta$ γράφω
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$$
ξένες ενώσεις διαστημάτων, άρα
$$A \cap B = \Big(\bigcup_i I_i\Big) \cap \Big(\bigcup_j J_j\Big)$$
$$= \bigcup_i \bigcup_j \underbrace{(I_i \cap J_j)}$$
διαστήματα ή κενά και είναι ξένα ανά δύο

άρα $A \cap B \in \Delta$

Μένει: αν $A \in \Delta$ τότε $A^c \in \Delta$

Απόδ Πρώτα, έστω ότι A είναι διάστημα τότε A^c είναι όντως ένωση ξένων διαστημάτων



Γενική περίπτωση:
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad \text{οπότε}$$
$$A^c = \bigcap_{i=1}^{n} I_i^c \quad \text{κάθε ένα από}$$
τα I_i^c ανήκει στην Δ

άρα, από το προηγούμενο βήμα, η τομή τους ανήκει στην Δ. ∎