διαστήματα, ξένα ανά δύο 21/10/2015

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \subseteq J$$

↑ διάστημα

νδο $\sum_{i=1}^{n} v(I_i) \le v(J)$ και ότι, αν I διάστημα τότε

$$\sum v(I_i) = v(I)$$

<u>Απόδειξη</u> Επαγωγή στο πλήθος n

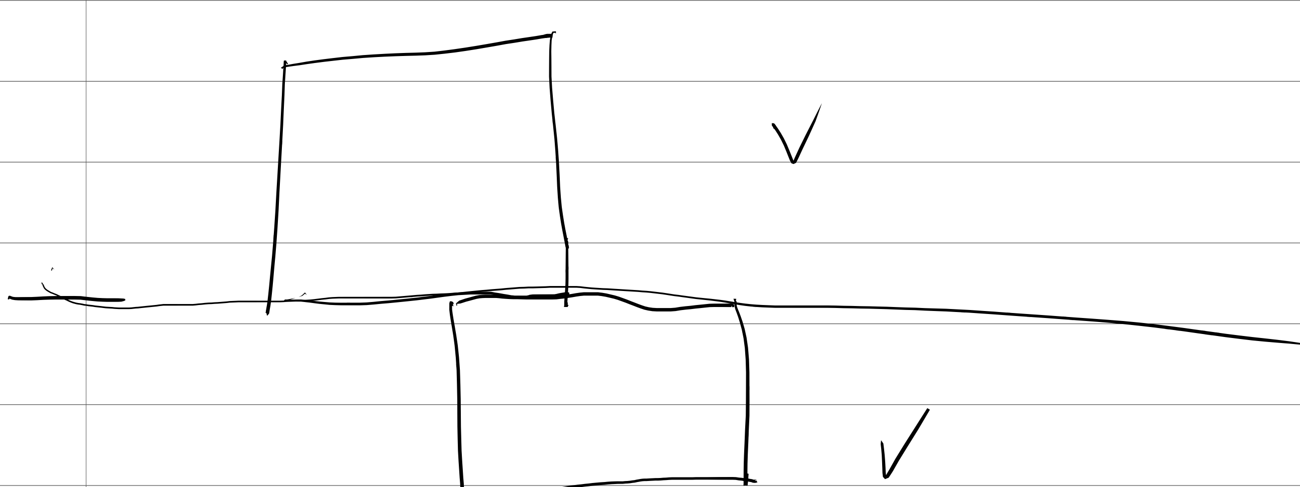
Για $n=1$ άμεσο από μονοτονία του v

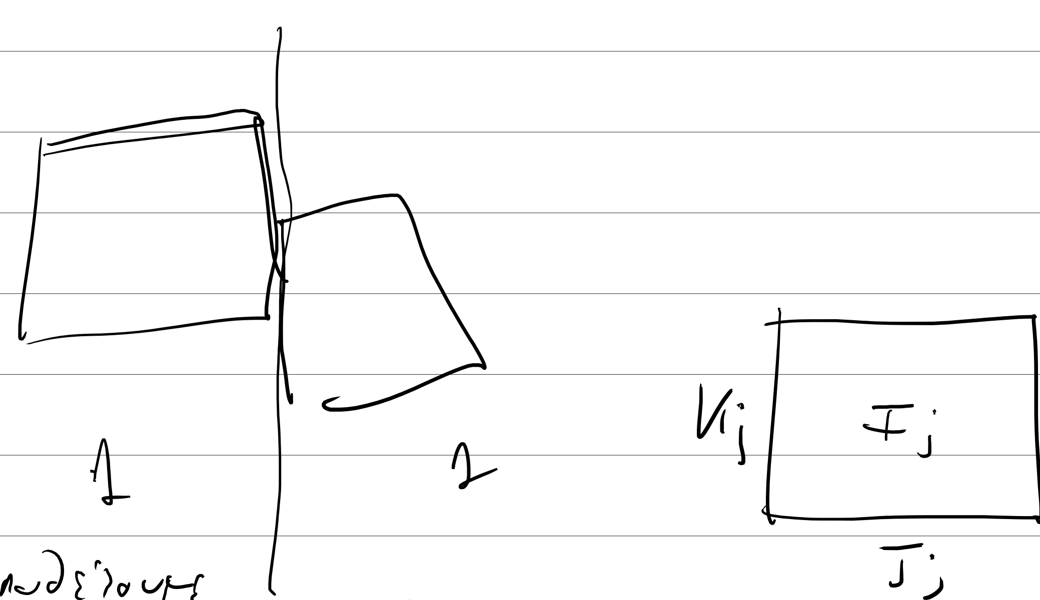
Υποθέτω ότι οκ για $n=1,2,\dots,m$

Κοιτάω $m+1$

$$\bigcup_{i=1}^{m+1} I_i \subseteq J$$

Ιδέα: Κόβω τον χώρο σε δύο ημιχώρους σε καθένα από τους οποίους έχω λιγότερους από $m+1$ όρους





Για απλότητα, υποθέτουμε ότι <u>$k=2$</u>

$$I = \bigcup_{j=1}^{m+1} I_j, \qquad I_j = J_j \times K_j$$

Ξένα ανά δύο:

$$I_1 \cap I_{m+1} = \emptyset$$

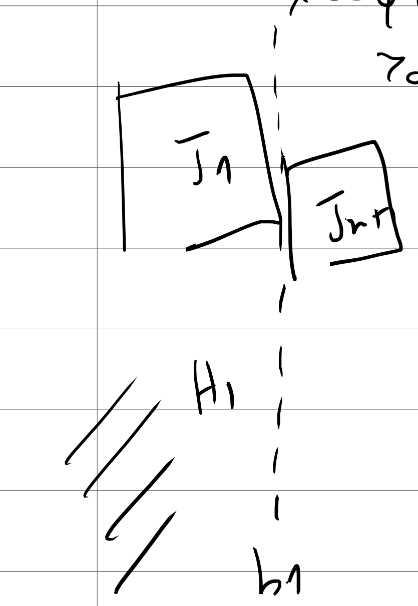
$$(J_1 \times K_1) \cap (J_{m+1} \times K_{m+1}) = \emptyset$$

$\Rightarrow$ ή $J_1 \cap J_{m+1} = \emptyset$

ή $K_1 \cap K_{m+1} = \emptyset$

χωρίς βλάβη υποθέτω $J_1 \cap J_{m+1} = \emptyset$ και ότι το J_1 είναι "αριστερά" του J_{m+1}, δηλαδή:

αν $b_1 = \sup J_1$ τότε $b_1 \le \inf J_{m+1}$.



Ορίζω ημίχωρους: $H_1 = \{(x,y) : x \le b_1\}$

και $H_2 = H_1^c$

Επειδή $H_1 \cap I_{m+1} = \emptyset$

$\bigcup_{j=1}^{m+1} I_j$

έχω $H_1 \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m+1} I_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} (H_1 \cap I_j) \subseteq H_1 \cap J$

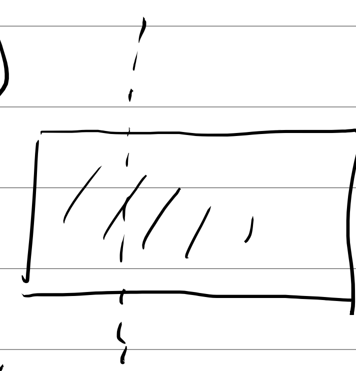
όμοια $H_2 \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m+1} I_j\right) = \bigcup_{j=2}^{m+1} (H_2 \cap I_j) \subseteq H_2 \cap J$

και για δύο ισχύει η επαγωγική υπόθεση:

$$\underbrace{v(H_1 \cap I_{m+1})}_{=0} + \sum_{j=1}^{m} v(H_1 \cap I_j) \le v(H_1 \cap J)$$

και

$$\underbrace{v(H_2 \cap I_1)}_{=0} + \sum_{j=2}^{m+1} v(H_2 \cap I_j) \le v(H_2 \cap J)$$



Προσθέτω κατά μέλη

$$\sum_{j=1}^{m+1} \left(v(H_1 \cap I_j) + v(H_2 \cap I_j) \right) \le v(H_1 \cap J) + v(H_2 \cap J)$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} v(I_j) \underset{\text{OK}}{\le} v((H_1 \cup H_2) \cap J) = v(J)$$

διότι:

$$(H_1 \cap J) \cup (H_2 \times J) = (a, b_1] \times (c,d) \cup [b_1, b] \times (c,d) = \left((a, b_1] \cup (b_1, b]\right) \times (c,d)$$

οπότε $v(\qquad) = ((b_1 - a) + (b - b_1)) \cdot (d - c) = (b-a) \cdot (d-c) = v(J)$

Πρόταση κάθε Borel είναι Leb-μετρήσιμο

(Για $k=1$)

Απόδ. Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel, αρκεί νδο

$$B \in \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-άλγ}}}{\mathcal{M}_{\lambda^*}}$$

Αρκεί νδο ότι τα ανοιχτά διαστ. $(b,+\infty)$ ανήκουν στη $\mathcal{M}_{\lambda^*}$

διότι η

$$\sigma\left(\{(b,+\infty),\ b\in\mathbb{R}\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Αρκεί νδο $\forall\ B=(b,+\infty)$ κόβει καλά $\forall\ A\subseteq\mathbb{R}$

και μάλιστα αρκεί να το δείξω: $\forall\ A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A)<+\infty$

νδο

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A\cap B) + \lambda^*(A\cap B^c)$$

(διότι $\leq$ αρκεί από την υποπροσθ. του λ^*)

Από τον ορισμό του $\lambda^*(A) = \inf \ldots$

$\forall\, \varepsilon>0$ μπορώ

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad I_n: \text{αν. φρ. διαστ.}$$

με

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \lambda^*(A)+\varepsilon$$

[εδώ $v(I_n)$ = το μήκος. Αν $k\geq 3$, v = όγκος]

Έχω $A\cap B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n\cap B)$

$A\cap B^c \subseteq \bigcup (I_n\cap B^c)$

σ-υποπροσθ. του λ^*

$$\lambda^*(A\cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(I_n\cap B) \overset{\text{διαστ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n\cap B)$$

$$\lambda^*(A\cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(I_n\cap B^c) \underset{\text{διαστ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n\cap B^c)$$

Επειδή τα $I_n\cap B$ και $I_n\cap B^c$ είναι διαστήματα έχω $\lambda^*(I_n\cap B)=v(I_n\cap B)$, και (B^c) (B^c). Επίσης $v(I_n\cap B)+v(I_n\cap B^c) = v(I_n)$ για τον ίδιο λόγο!

Προσθέτω κατά μέλη:

$$\lambda^*(A\cap B)+\lambda^*(A\cap B^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(v(I_n\cap B)+v(I_n\cap B^c)\right)$$

$\| \leftarrow$ διαστήματα

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \lambda^*(A)+\varepsilon$$

Επειδή το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έδειξα ότι

$$\lambda^*(A\cap B)+\lambda^*(A\cap B^c) \leq \lambda^*(A)$$

(Για $k>1$, απόδειξη λίγο πιο περίπλοκη, διότι το $I_n\cap B^c$ δεν είναι αναγκ. διάστημα, αλλά μπορώ να το κάνω ξένη ένωση πεπερ. πλήθους διαστημάτων.)

Δράση της ομάδας $\mathbb{R}^n$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$a \mapsto a+x$$

διατηρεί τον όγκο (λ) των διαστημάτων

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, f_x είναι συνεχής, 1-1, επί και επειδή $f_x^{-1} = f_{-x}$

η f_x^{-1} είναι συνεχής $\Rightarrow$ f_x ομοιομορφισμός.

Η f_x και η αντίστροφή της f_{-x} αντιστρέφουν ανοιχτά σε ανοιχτά, κλειστά σε κλειστά, άρα Borel σε Borel διότι η απεικόνιση:

$$A \mapsto f_x^{-1}(A)$$

διατηρεί $\cup, \cap, X \setminus A$

άρα διατηρεί την $\sigma(\text{ανοιχτά}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Ισχ αν $B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}^k$ τότε

$$f_x(B) = B + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$$

$$\text{και } \lambda(B+x) = \lambda(B)$$

Αποδ Πρώτα, Ισχ ότι $\forall A \subseteq \mathbb{R}^k$ έχω

$\lambda^*(A) = \lambda^*(A-x)$. Πράγματι,

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum \lambda(I_n) : A \subseteq \bigcup I_n\}$$

$$\lambda^*(A-x) = \inf\{\sum \lambda(I_n) : A - x \subseteq \bigcup I_n\}$$

$$\Updownarrow$$

$$A \subseteq \bigcup (I_n + x),$$

και $\lambda(I_n + x) = \lambda(I_n)$ $\forall n$, άρα

$$= \inf\{\sum \lambda(I_n + x) : A \subseteq \bigcup (I_n + x)\} = \lambda^*(A).$$

Τώρα, γνωρίζουμε $B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$: αφού B μετρήσιμο:

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A - x) = \lambda^*((A-x)\cap B) + \lambda^*((A-x)\cap B^c)$$

$$(\text{από τον Ισχ.}) = \lambda^*(((A-x)\cap B) + x) + \lambda^*(((A-x)\cap B^c) + x)$$

$$= \lambda^*(A \cap (B+x)) + \lambda^*(A \cap (B+x)^c)$$

άρα το $B+x$ κόβει καλά.

άρα $B + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$

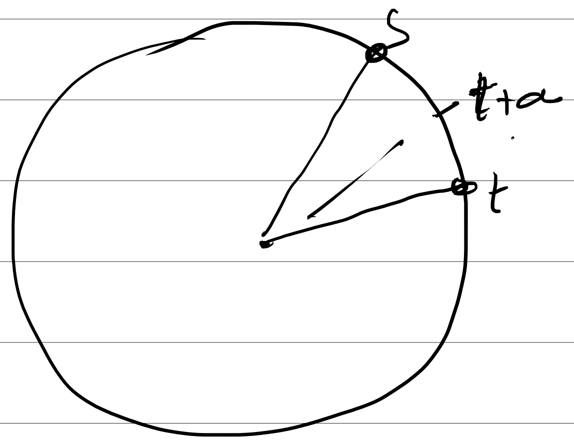
Επομένως

$$\lambda(B+x) = \lambda^*(B+x)$$
$$= \lambda^*(B) \quad \text{από τον Ισχ.}$$
$$= \lambda(B). \quad \blacksquare$$

Είναι όλα τα σύνολα Lebesgue μετρήσιμα;;

Θα δείξω ότι $\exists\, F \subseteq S^1$ που δεν είναι Leb μετρήσιμο.

$$S^1 = \{ e^{2\pi i t} : t \in \mathbb{R} \}$$



μήκος τόξου $= s - t =$ μέτρο Leb του $(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$

Έχω δράση της ομάδας $\mathbb{Q}$: $f_a(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i (t+a)}$

Ορίζω $e^{2\pi i t} \sim e^{2\pi i s}$ όταν βρίσκονται στην ίδια τροχιά δηλ. όταν $\exists\, a \in \mathbb{Q}$ που πάει το ένα στο άλλο, δηλ

$$e^{2\pi i (t+a)} = e^{2\pi i s}$$

Οι τροχιές (δηλ. οι κλάσεις ισοδυναμίας) αν έχουν ένα κοινό σημείο ταυτίζονται, και η ένωσή τους είναι η S^1. Δηλ. διαμερίζουν την S^1.

Χρησιμοποιώντας το ΑΞΙΩΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ από κάθε τροχιά (κλάση) διαλέγω έναν αντιπρόσωπο.

Ονομάζω $F \subseteq S^1$ το σύνολο όλων αυτών των αντιπροσώπων.

Παρατηρώ ότι αν $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ με $q_1 \neq q_2$, τότε

$$f_{q_1}(F) \cap f_{q_2}(F) = \emptyset \qquad \text{Ξένα ανά δύο}$$

διότι αν $\exists\ e^{2\pi i (t+q_1)} = e^{2\pi i (s+q_2)}$

τότε $e^{2\pi i (t + (q_1 - q_2))} = e^{2\pi i s}$

δηλ $e^{2\pi i t} \sim e^{2\pi i s}$ οπότε $e^{2\pi i t} = e^{2\pi i s}$ αφού ανήκουν στο F (έχω μόνο έναν από κάθε κλάση). Άρα $e^{2\pi i (q_1 - q_2)} = 1$ άρα $q_1 = q_2$ αφού $\in [0,1)$.

Επίσης: $\bigcup_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} f_q(F) = S^1$

γιατί κάθε σημείο $z \in S^1$ ανήκει σε μία τροχιά δηλ $\exists\, w \in F$ και $\exists\, q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ (μπορώ) τ.ω. $e^{2\pi i q} w = z$

Άρα, έχω διαμερίσει τη S^1 σε αριθμήσιμο πλήθος ξένα σύνολα. Αν το F ήταν Lebesgue μετρήσιμο θα ήταν όλα Leb-μετρήσιμα,

οπότε $\lambda(S^1) = \sum_{q \in [0,1)} \underbrace{\lambda(f_q(F))}_{= \lambda(F)}$ (σ-προσθ. του λ)

Αν $\lambda(F) = 0$, έπεται ότι $\lambda(S^1) = 0$, άτοπο.

Αν $\lambda(F) > 0$, έπεται ότι $\lambda(S^1) = +\infty$, πάλι άτοπο. ∎