26/10/2015

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: $\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}\ B \supseteq A\}$

$\forall A \subseteq X$: $\mu_*(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{A},\ C \subseteq A\}$

- $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ (διότι $B \supseteq A \supseteq C \Rightarrow \mu(B) \geq \mu(C)$)

- όταν $A \in \mathcal{A}_*$ τότε $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$
  προφανώς επειδή

<u>Πρότ.</u> (α) $\forall A \subseteq X$ νδο $\exists B \in \mathcal{A} : B \supseteq A$ τω $\mu^*(A) = \mu(B)$

Αποδ.
- Αν $\mu^*(A) = +\infty$ τότε ΟΚ, βάζε $B = X$
- Αν $\mu^*(A) < +\infty$ τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ μπορώ $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \supseteq A$ τ.ω
  $\mu(B_n) < \mu^*(A) + 1/n$
  Θέτω $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$

  τότε $B \supseteq A$ και $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
  $= \mu(B) \leq \mu(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}\ \forall n$, ΟΚ.

(β) Το μ^* είναι εξωτ. μέτρο
- $\mu^*(\emptyset) = 0$: $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

- Αν $A_1 \subseteq A_2$ τότε $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$:

$$\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} : B \supseteq A_2\} \subseteq \{\mu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \supseteq A_1\}$$
$$\inf\{\ \} \geq \inf\{\ \}$$
$$\mu^*(A_2) \geq \mu^*(A_1)$$

- μ^* είναι σ-υποπροσθετικό: δηλ αν $A_n \subseteq X$ τότε $\mu^*(\bigcup A_n) \leq \sum \mu^*(A_n)$

Από (i), $\forall A_n\ \exists B_n \in \mathcal{A} : B_n \supseteq A_n$ και $\mu(B_n) = \mu^*(A_n)$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{\text{μον}}{\leq} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ ΟΚ}$$

$\bigcup B_n \in \mathcal{A}$

μ σ-υποπροσθ.

Lebesgue : $v(I) = b - a$
στο $\mathbb{R}$

$$\lambda^*(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathcal{M}_{\lambda^*} = \sigma\text{-άλγ των Leb. μετρήσιμων}$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$$ άρα ορίζεται μέτρο λ Leb στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ανάποδα:

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \rightsquigarrow \mu^*(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ B \supseteq A\}$$
$\forall A \subseteq X$

<u>Ισχ</u>

$\mu^*(A) = \lambda^*(A)$ που είχα ορίσει

$$\inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ B \supseteq A\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n),\ I_n \text{ ανοιχτά διαστ. } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

(άσκ.)

αν $\mu^*(A) < +\infty$

ΝΔΟ: $A \in \mathcal{A}_\mu \iff \mu_*(A) = \mu^*(A) \; (= \overline{\mu}(A))$

Απόδ

$(\Rightarrow)$ $A \in \mathcal{A}_\mu \Rightarrow \exists\, E, F \in \mathcal{A} :\; E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$

όπως $\overline{\mu}(A) = \mu(F) = \mu(E)$

$F \in \mathcal{A}$ και $F \supseteq A$

$\Rightarrow \mu(F) = \mu^*(A)$

$E \in \mathcal{A}$, και $E \subseteq A$

$\Rightarrow \mu(E) = \mu_*(A)$

άρα $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ (και $= \overline{\mu}(A)$)

$(\Leftarrow)$ Υποθέτω ότι $\mu_*(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{A},\, C \subseteq A\}$

$\qquad\qquad \parallel$

$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A},\, B \supseteq A\}$

$\exists\, C_n, B_n \in \mathcal{A}$, $C_n \subseteq A \subseteq B_n$

$(C_n) \nearrow \qquad (B_n) \searrow$

και $\mu(C_n) \to \mu_*(A)$
$\mu(B_n) \to \mu^*(A)$ ίσα και πεπερ.

Θέτω $E = \bigcup C_n \subseteq A$, $F = \bigcap B_n \supseteq A$

μετρήσιμα

και $\mu(F \setminus E) \le \mu(B_n \setminus C_n) \quad \forall n$

$\parallel$

$\mu(B_n) - \mu(C_n) \to 0$

διότι πεπερ από ένα n_0 και μετά

οπότε $\mu(F \setminus E) = 0$, άρα $A \in \mathcal{A}_\mu$ ∎

Θεώρημα Επέκτασης Καραθεοδωρή.

- σ-κάλυψη ενός X λέγεται μια συλλογή $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$

τ.ω. (i) $\emptyset \in \mathcal{C}$

(ii) $\forall A \subseteq X \ \exists \{C_1, \dots C_n \dots\} \subseteq \mathcal{C}$

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

→ Προφ. $X = \mathbb{R}$ παίρνω για $\mathcal{C} = \{$ανοιχτά φρ. διαστ.$\}$

Αρκεί η (ii)' $\exists \{X_1, X_2, \dots\} \subseteq \mathcal{C}$ τ.ω

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

προφανώς, (ii) $\Rightarrow$ (ii)'

$\Leftarrow$;

ναι, κατά τετριμμένο τρόπο:

αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$

τότε $\forall A \subseteq X$ ισχύει $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

$\forall A \subseteq X \qquad \varphi(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) \ : \ C_n \in \mathcal{C}, \ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}$

Εξωτ. μέτρο

(a) $\varphi(\emptyset) = \tau(\emptyset) = 0$

(b) μονοτονία: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$

Αν $C_n \in \mathcal{C}$ με $A_2 \subseteq \bigcup_n C_n$

τότε $A_1 \subseteq \bigcup_n C_n$

άρα:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) : \bigcup C_n \supseteq A_2 \right\} \subseteq \left\{ \sum^{\infty} \tau(C_n) : \bigcup C_n \supseteq A_1 \right\}$$

$$\Rightarrow \inf\{ \quad \} \geq \inf\{ \quad \}$$

δηλ: $\varphi(A_2) \geq \varphi(A_1)$

(c) σ-υποπροσθ: $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{?}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$

$\forall \epsilon > 0$ $\underline{\forall n}$, μπορώ $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{n,j}$, $C_{n,j} \in \mathcal{C}$

τ.ω $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{n,j}) \leq \varphi(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_{n,j}\right)$: αριθμήσιμη ένωση

$\Downarrow$

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{n,j})\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) + \epsilon$$

και επειδή το $\epsilon > 0$ είναι τυχαίο, τελειώσαμε ■

$\mu_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, +\infty]$ προμέτρο

$\forall A \subseteq X$, $\quad \mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{A}_0 \right\}$

ήδη είδαμε ότι μ^* <u>είναι</u> εξωτ. μέτρο

→ ΘΔΟ μ^* επεκτείνει το μ_0

<u>Απόδ</u> Έστω $A \in \mathcal{A}_0$ νδο $\mu^*(A) = \mu_0(A)$

Προφανώς $\mu^*(A) = \inf\{--\} \leq \mu_0(A)$

Αντίστροφα,

Έστω $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ όπου $A_n \in \mathcal{A}_0$

νδο

$$\mu_0(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

(1η προσπάθ.) Τετριμμένο, διότι το μ_0 είναι από υπόθεση, σ-προσθ., άρα και σ-υποπροσθ.

όπως, γιατί κανονίζεσαι; Γιατί, μπορεί $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ να <u>μην</u> είναι στο $\mathcal{A}_0$!

(2η προσπάθ.) Ξέρω όμως/ότι μ^* είναι εξωτ. μέτρο

άρα: $\underbrace{\mu^*(A)}_{\overset{\uparrow}{?\ \mu_0(A)\ ?}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$

: πάλι απέτυχε!

(3η και φαρμακερή): Παίρνω $A \subseteq \bigcup A_n$

πρώτα ξενοποιώ τα A_n:

Βρίσκω $B_n \subseteq A_n$, $B_n \in \mathcal{A}_0$ τ.ω.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

υπενθ:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}_0$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ κοκ

εξακολουθώ να έχω $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

άρα $\underset{\overset{\uparrow}{\mathcal{A}_0}}{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(A \cap B_n)}_{\in \mathcal{A}_0}$ και ξένα ανά δύο

$\Downarrow$ επειδή μ_0 είναι προμέτρο!

$$\mu_0(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

∎

Επόμενο βήμα: από το μ^* φτιάχνω $\mathcal{M}_{\mu^*}$ = σ-άλγεβρα των μετρήσιμων συνόλων. Θυμίζω $B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$:
$\forall A \subseteq X$:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Τώρα θέλω να $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$
(οπότε ο περιορισμός $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ είναι σ-προσθ. μέτρο)

Αρκεί γι'αυτό να δείξω $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$
διότι ξέρω ότι $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι σ-αλγ
οπότε $\underbrace{\sigma(\mathcal{A}_0)}_{= \mathcal{A}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$

Αυτό που πρέπει να δείξω είναι ότι $\forall B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ κόβει καλά $\forall A \subseteq X$ μάλιστα αρκεί $\mu^*(A) < +\infty$ να

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Έστω $\epsilon > 0$. Μπορώ $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}_0$ τ.ω

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon \quad (*)$$

Όμως,

$$\mu_0(A_n) = \mu_0(A_n \cap B) + \mu_0(A_n \cap B^c) \quad \forall n$$

διότι $A_n \cap B$, $A_n \cap B^c \in \mathcal{A}_0$ και είναι ξένα και το μ_0 είναι πεπ. προσθετικό.

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n \cap B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n \cap B^c)$$

$$\geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

διότι $A \cap B \subseteq \bigcup (A_n \cap B)$ και $A \cap B^c \subseteq \bigcup (A_n \cap B^c)$

από $(*)$

$$\mu^*(A) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

το $\epsilon > 0$ τυχόν, τελειώσαμε. ∎

Μοναδικότητα: υποθέτω ότι το μ_0 είναι σ-πεπερ.

Έστω ν μέτρο στο $(X, \mathcal{A})$ με $\nu|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$

ν.δ.ο. $\nu(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Αν $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ όπου $\underline{A_n \in \mathcal{A}_0}$ τότε:

$$\nu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \quad \text{γιατί το } \nu \text{ είναι σ-υποπροσθ.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

δηλ. $\forall$ κάλυψη $A \subseteq \bigcup A_n$ έχω $\nu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$

από τον ορισμό του μ^*: $\nu(A) \leq \mu^*(A)$

όμως $A \in \mathcal{A}$ άρα $\mu^*(A) = \mu(A)$

έδειξα ότι $\nu(A) \leq \mu(A)$

Αντίστροφα ν.δ.ο. $\nu(A) \geq \mu(A)$ ας υποθέσω πρώτα ότι $\mu(A) < +\infty$

Έστω $\epsilon > 0$, μπορώ $A \subseteq \bigcup_n B_n$, $B_n \in \mathcal{A}_0$

και $\sum \mu(B_n) < \mu(A) + \epsilon$

θέτω

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A} \quad \text{άρα}$$

$$\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \quad (\text{διότι το } \mu \text{ είναι μέτρο στη } \mathcal{A})$$

$$< \mu(A) + \epsilon < +\infty$$

άρα $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) < \epsilon \quad (**)$

όμως $\mu(B) = \lim_m \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n\right) = \lim_m \nu\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n\right) = \nu(B)$

διότι $\bigcup_{n=1}^{m} B_n \in \mathcal{A}_0$ (: άλγεβρα)

οπότε: $B \supseteq A$

$$\mu(A) \leq \mu(B) = \nu(B) \underset{\nu \text{ προσθ.}}{=} \nu(B \cap A) + \nu(B \cap A^c) \overset{\text{διότι } \nu \leq \mu}{\leq} \nu(B) + \mu(B \cap A^c)$$

$$\leq \nu(A) + \overset{\text{από } (**)}{\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0$$

άρα $\mu(A) \leq \nu(A)$

άρα $\mu(A) = \nu(A)$ όταν $\mu(A) < +\infty$

Στη γενική περίπτωση, αφού $X = \bigcup F_n$ όπου $(F_n) \nearrow$ και $\mu_0(F_n) < +\infty$

$$\forall A \subseteq X \text{ έχω } \mu(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$$

$$= \lim_n \underbrace{\mu(A \cap F_n)}_{< +\infty} = \lim_n \nu(A \cap F_n) = \nu(A).$$

από την προηγούμενη περίπτ.

∎