Άσκηση Αν $X \neq \emptyset$ και $a : X \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση, θέτουμε, για κάθε $A \subseteq X$

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} a(x) : F \subseteq A,\ F \neq \emptyset \text{ και } F \text{ πεπερασμένο} \right\}. \tag{1}$$

Επιπλέον, θέτουμε $\sum_{x \in \emptyset} a(x) = 0$. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Αν $\sum_{x \in X} a(x) < \infty$, τότε το σύνολο $J = \{x \in X : a(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. (Υπόδειξη:

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : a(x) > \frac{1}{n}\}.)$$

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_a : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ που ορίζεται από την

$$\mu_a(A) = \sum_{x \in A} a(x) \qquad A \subseteq X$$

ορίζει ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$. Η μ_a είναι η *σημειακή κατανομή που επάγεται από την* a και ο $a(x)$ είναι η *μάζα* του x.

Λύση *(Συνεργασία πολλών μαθηματικών, στη διάρκεια και μετά το μάθημα)*
Το (α) έγινε στην τάξη.

Επίσης εύκολα δείξαμε ότι το μ_a είναι πεπερασμένα προσθετικό και συνεπώς μονότονο.

Μένει λοιπόν να δειχθεί ότι αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του X και $A = \bigcup_n A_n$ τότε $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$. (Γράφω μ αντί για μ_a για συντομία.)

Απο την σχέση $A_n \subseteq A$ για κάθε n έχουμε $\mu(A_n) \leq \mu(A)$ για κάθε n άρα $\lim_n \mu(A_n) \leq \mu(A)$. Για να δειχθεί ισότητα, αρκεί (αφού η $(\mu(A_n))$ είναι αύξουσα ακολουθία, να δείξουμε ότι αν $c < \mu(A)$ τότε υπάρχει m ώστε $\mu(A_m) > c$.

Απο τον ορισμό του $\mu(A)$ ως supremum πάνω στα πεπερασμένα υποσύνολα του A, υπάρχει $F \subseteq X$ πεπερασμένο ώστε $\sum\limits_{x \in F \cap A} a(x) > c$.

Ωραία. Όμως η ακολουθία $(F \cap A_n)$ είναι αύξουσα και $F \cap A = \bigcup_n (F \cap A_n)$. Εφόσον λοιπόν το $F \cap A$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε $F \cap A = F \cap A_n$ για κάθε $n \geq m$. Επομένως

$$\mu(F \cap A) = \mu(F \cap A_m), \quad \text{δηλ.} \qquad \sum_{x \in F \cap A} a(x) = \sum_{x \in F \cap A_m} a(x)$$

άρα $\sum\limits_{x \in F \cap A_m} a(x) > c$ οπότε και $\mu(A_m) \geq \sum\limits_{x \in F \cap A_m} a(x) > c$.