4) ~~A~~ Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη-μετρήσιμο (υπάρχουν τέτοια)

Θέτω $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \notin A \end{cases}$ και σου κάνει

(Δ.Ο. f μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ A μετρήσιμο)

5) Θεωρώ ~~[illegible]~~ $g = \limsup f_n$, $h = \liminf f_n$: είναι μετρήσιμες

και $E = \{x : g(x) = h(x)\} \cap \mathbb{R}$

~~[illegible]~~ άρα μετρήσιμο

Άλλη λύση:

(προσωρινή εξήγηση της ισότητας)

$$E = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{n=m}^{+\infty} \bigcap_{k=m}^{+\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon\} =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{n=m}^{+\infty} \bigcap_{k=m}^{+\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f_k(x)| < \tfrac{1}{j}\}$$

που είναι μετρήσιμο

γιατί f_n, f_m μετρήσιμες

6) $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-μετρήσιμη

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη

$g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε $(g\circ f)^{-1}((-\infty, a]) = f^{-1}(g^{-1}((-\infty, a]))$

· $g^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}((-\infty, a])) \in \mathcal{A}$

8) Σημειώσεις e-class (Διαφάνειες Μετρήσιμο που δεν είναι Borel)

$\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto \frac{1}{2}(f(x) + x)$

Ισχ: $\lambda(\phi(C)) = \frac{1}{2}$

$\phi(C) = [0,1] \setminus \phi([0,1] \setminus C) \Rightarrow \lambda(\phi(C)) = \lambda([0,1]) - \lambda(\phi([0,1]$

$= 1 - \lambda(\phi([0,1] \setminus C))$

· όμως $[0,1] \setminus C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, όπου $A_n = [0,1] \setminus C_n$

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$, ανοιχτά, ξένα ανά δύο διαστήματα

όμως, $f|_{I_j}$ σταθερό

$f|_{I_j} = c_j \Rightarrow \phi(I_j) = (c_j + I_j) \cdot \frac{1}{2}$

· $\lambda(\phi_i(I_j)) = \lambda(I_j)$

Συνεπώς $\lambda(\phi([0,1] \setminus C)) = \lambda(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \phi(I_j)) \overset{\text{ξένα}}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(\phi(I_j)) =$

$= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(I_j) = \frac{1}{2} \lambda(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j) = \frac{1}{2} \lambda([0,1] \setminus C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda(\phi(C))$

• Τότε $\exists M \subseteq \phi(C)$ με $M \notin \mathcal{M}_{\lambda^*}$ (λυμένη άσκηση)
• Αφού $\phi^{-1}(M) \subseteq C \Rightarrow$ το $\phi^{-1}(M)$ λ-μηδενικό και αφού ο $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ πλήρης $\Rightarrow \phi^{-1}(M) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$

Έστω ότι $\phi^{-1}(M) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε $M = (\phi^{-1})^{-1}(\phi^{-1}(M)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αφού η ϕ^{-1} συνεχής και άρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - μετρήσιμη $\Rightarrow M \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ αντίφαση
~~Έστω~~ ~~τότε~~ $\phi^{-1}(M) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$
Άρα

~~7~~) Έστω $\cdot\ \varphi = \phi^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$
  $\cdot\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$
  $\cdot$ ορίζουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \varphi(x) & x \in [0,1] \\ 1 & x \in (1, +\infty) \end{cases}$

• g συνεχής
• Θέτουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f = \mathbb{1}_{\phi^{-1}(M)}$ χαρακτηριστική
• $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη Lebesgue - μετρήσιμη
  Πράγματι, $(f\circ g)^{-1}((1/2, +\infty)) = g^{-1}(f^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty)) = g^{-1}(\phi^{-1}(M)) =$
$= \varphi^{-1}(\phi^{-1}(M)) = \phi(\phi^{-1}(M)) = M \notin \mathcal{M}_{\lambda^*}$

• Το M μπορούμε να το επιλέξουμε έτσι ώστε $\{0,1\} \cap M = \emptyset$
  Αφού $\lambda(\phi(C) \setminus \{0,1\}) = \lambda(\phi(C)) = 1/2 > 0$ και άρα αφού
  $M \subseteq \phi(C) \setminus \{0,1\} \Rightarrow M \cap \{0,1\} = \emptyset$

9) $f : ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$. $\mathcal{B}([0,1])$ - μετρήσιμη
  Από το Θ. Luzin $\exists f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε
  $\lambda(\underbrace{\{x \in [0,1] : f_n(x) \neq f(x)\}}_{A_n}) < 1/2^n$
Θέτω:
• $A = \limsup A_n$
• $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$

Από Borel Cantelli $\Rightarrow \lambda(A) = 0$.
Έστω $x \in [0,1] \setminus A$: Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : f_n(x) = f(x) \quad \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ Άρα $[0,1] \setminus A \subseteq \underbrace{\{x \in [0,1] : f_n(x) \to f(x)\}}$
$\Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow B$ λ-μηδενικό $\Rightarrow f_n \to f$ λ-σχεδόν παντού.
$\underset{B}{\shortparallel}$