Ασκήσεις για το μέτρο γινόμενο

1. *Δείξτε ότι αν* $a_{i,j} \geq 0$ *τότε* $\sum_i \sum_j a_{i,j} = \sum_j \sum_i a_{i,j} \in [0, +\infty]$.

2. *Δείξτε ότι αν* $[a_{i,j}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ *τότε* $\sum_i \sum_j a_{i,j} \neq \sum_j \sum_i a_{i,j}$.

3. *Δείξτε ότι αν* $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ *και* $\sum_i \sum_j |a_{i,j}| < \infty$ *τότε οι σειρές* $\sum_i \sum_j a_{i,j}$ *και* $\sum_j \sum_i a_{i,j}$ *συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.*

4. *Έστω* μ *ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο* $(X, \mathcal{A})$. *Υποθέτουμε ότι* $X = \bigcup_n X_n$ *όπου* $X_n \in \mathcal{A}$, *και η* (X_n) *είναι αύξουσα. Ορίζουμε* $\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$, $A \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. *Δείξτε ότι για κάθε* $f : X \to [0, +\infty]$ *μετρήσιμη ισχύει*

$$\int_X f \, d\mu_n = \int_{X_n} f \, d\mu.$$

5. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ*-πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Έστω* $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *με* $(\mu \times \nu)(C) = 0$. *Δείξτε ότι* μ*-σχεδόν για κάθε* $x \in X$ *ισχύει ότι* $\nu(C_x) = 0$ *και* ν*-σχεδόν για κάθε* $y \in Y$ *ισχύει ότι* $\mu(C^y) = 0$.

6. *Έστω* $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$ *ο χώρος μέτρου όπου* $\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Δείξτε ότι στον χώρο $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}) \otimes) \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ *το μέτρο γινόμενο* $\mu \times \mu$ *δεν είναι μοναδικό (δείτε την άσκηση 9-6 Κουμουλλή-Νεγρεπόντη).*

7. *Δείξτε ότι ο χώρος μέτρου* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_{\lambda_2^*}, \lambda_2)$ *είναι η πλήρωση του* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda \times \lambda)$, *όπου* λ *το μέτρο Lebesgue στο* $\mathbb{R}$ *και* λ_2 *το μέτρο Lebesgue στον* $\mathbb{R}^2$.