Ασκήσεις για το ολοκλήρωμα

1. *Δείξτε ότι* $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x}\, d\lambda(x) = +\infty$.

Υπόδειξη: Θεωρώ τις $f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[1,n]}$ ή $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\chi_{[k,k+1)}$. Είναι μη αρνητικές, μετρήσιμες και $f_n \le f$, $s_n \le f$ για κάθε n. Παρατηρώ ότι $\displaystyle\int_1^\infty f_n d\lambda = \log n$ και $\displaystyle\int_1^\infty s_n d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$.

2. *Βρείτε μια ακολουθία $\{f_n\}$ μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ τέτοια ώστε $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n\, d\lambda = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την $\{f_n\}$ έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση; Τι συμβαίνει αν $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$;*

Υπόδειξη: Προτάθηκαν τα παραδείγματα $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ και $g_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Η δεύτερη ακολουθία μάλιστα συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση. Ακόμα απλούστερο παράδειγμα είναι η ακολουθία (h_n) σταθερών συναρτήσεων $h_n(x) = \frac{1}{n}$ για κάθε x.

Για την περίπτωση $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, πάλι υπάρχει παράδειγμα, πχ $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$.

Όμως, όταν είμαστε σε χώρο πεπερασμένου μέτρου, αν ζητήσουμε επιπλέον η ακολουθία να συγκλίνει ομοιόμορφα, ή απλώς να είναι ομοιόμορφα φραγμένη, τότε αναγκαστικά ισχύει $\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu$. Πράγματι, αν η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη, π.χ. $|f_n(x)| \le M$ για κάθε x και κάθε n, τότε $f_n \le g$ για κάθε n όπου $g(x) = M$ για κάθε x, και η g είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση εφόσον ο χώρος έχει πεπερασμένο μέτρο ($\int g d\lambda = M\lambda([0,1]) < \infty$). Επομένως εφαρμόζεται το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

3. *Αποδείξτε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για σχεδόν παντού σύγκλιση: Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $0 \le f_n \nearrow f$ σχεδόν παντού και οι f_n, f είναι μετρήσιμες, τότε $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.*

Υπόδειξη: Υπάρχει ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$, με $\mu(A^c) = 0$, ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Επομένως $(f_n\chi_A)(x) \nearrow (f\chi_A)(x)$ για κάθε x. Άρα $\int f\chi_A d\mu = \lim \int f_n\chi_A d\mu$ από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης. Όμως $\int f_n\chi_A d\mu = \int f_n d\mu$ και $\int f\chi_A d\mu = \int f d\mu$ αφού $\mu(A^c) = 0$.

4. *Υποθέτοντας το Λήμμα Fatou αποδείξτε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.*

Υπόδειξη: Αν $f_n \nearrow f$ έχουμε $f_n \le f$, άρα $\int f_n d\mu \le \int f d\mu$ για κάθε n. Επομένως, $\limsup \int f_n d\mu \le \int f d\mu = \liminf f_n d\mu \overset{F}{\le} \liminf \int f_n d\mu$ άρα υπάρχει το όριο $\lim \int f_n d\mu$ και ισούται με $\int f d\mu$.

5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \to f$, και $f_n \le f$ για κάθε n. Δείξτε ότι*

$$\int f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu.$$

Υπόδειξη: Ακριβώς ίδια απόδειξη με την προηγούμενη άσκηση!

6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει k τέτοιος ώστε $\int f_k d\mu < \infty$. Δείξτε ότι*

$$\int f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu.$$

Υπόδειξη: Αφού $\int f_k < \infty$, η ακολουθία $(f_n)_{n\ge k}$ κυριαρχείται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f_k. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται λοιπόν ότι $\int f\ d\mu = \lim_{n\ge k} \int f_n\ d\mu$. Όμως η ακολουθία $(\int f_n d\mu)_{n\ge k}$ είναι υπακολουθία της (μονότονης, άρα συγκλίνουσας) ακολουθίας $(\int f_n d\mu)_n$, άρα έχουν το ίδιο όριο $\lim_{n\ge k} \int f_n\ d\mu = \lim_n \int f_n\ d\mu$.

7. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [-\infty,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f d\mu = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.*

Υπόδειξη: Η υπόθεση $f > 0$ σ.π. λέει ότι το σύνολο $A = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$ έχει μέτρο $\mu(A) = 0$ (ανήκει στην $\mathcal{A}$, αφού η f είναι μετρήσιμη). Έχουμε $0 \leq f\chi_{A^c} \leq f$ και άρα $0 \leq \int_E f\chi_{A^c} d\mu \leq \int_E f d\mu = 0$. Δηλαδή $\int f\chi_{A^c\cap E} d\mu = 0$. Έπεται ότι $f\chi_{A^c\cap E} = 0$ σχεδόν παντού, αφού η $f\chi_{A^c\cap E}$ είναι μη αρνητική. Αλλά η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο A^c και συνεπώς $\chi_{A^c\cap E} = 0$ σχεδόν παντού, επομένως $\mu(A^c \cap E) = \int \chi_{A^c\cap E} d\mu = 0$. Έπεται τώρα ότι $\mu(E) = \mu(A^c \cap E) + \mu(A\cap E) = 0$ αφού $\mu(A) = 0$.

8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μη αρνητική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[f\geq 1/n]} f\, d\lambda.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης στον χώρο $(\mathbb{R},\mathcal{M}_{\lambda^*},\lambda)$: Για την πρώτη ισότητα, θέτουμε $f_n = f\chi_{[-n,n]}$ και για την δεύτερη, θέτουμε $g_n = f\chi_{A_n}$ όπου $A_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ (είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη).

9. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[f\leq n]} f\, d\mu.$$

Υπόδειξη: Όπως στην προηγούμενη άσκηση: αυτή τη φορά προσεγγίζουμε την f με τις $h_n = f\chi_{B_n}$ όπου $B_n = \{x \in X : f(x) \leq n\}$ (δηλαδή «κουρεύουμε» την f μέχρι το ύψος n).

10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$; Αν η f είναι επιπλέον συνεχής;*

Υπόδειξη: Όχι, δεν είναι σωστό. Παράδειγμα η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ με $f(n) = n$ όταν $n \in \mathbb{N}$ και $f(x) = 0$ όταν $x \notin \mathbb{N}$.

Μάλιστα η δεύτερη μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να γίνει συνεχής, φτιάχνοντας γύρω από κάθε σημείο $n \in \mathbb{N}$ ένα τρίγωνο με βάση πλάτους $\frac{2}{n^3}$ και ύψος n: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ που μηδενίζεται έξω απ΄ το $[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}]$, ικανοποιεί $f_n(n) = n$ και είναι «γραμμική» στα διαστήματα $[n - \frac{1}{n^3}, n]$ και $[n, n + \frac{1}{n^3}]$. Θέτουμε τώρα $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n(x)$. Η g είναι συνεχής, ολοκληρώσιμη με $\int g d\lambda = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} n \frac{2}{n^3} < \infty$ και $g(n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

11. *Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.*

12. *Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων σε ένα χώρο μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$. Είναι σωστό ότι*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \leq \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n \right) d\mu;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη: Στον χώρο $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, οι συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ αποτελούν αντιπαράδειγμα: η ακολουθία είναι ομοιόμορφα φραγμένη αλλά ο χώρος έχει άπειρο μέτρο. Επίσης, οι συναρτήσεις $g_n = n\chi_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$ στον χώρο $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ είναι αντιπαράδειγμα: εδώ ο χώρος έχει πεπερασμένο μέτρο αλλά η ακολουθία δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Όμως, αν $\mu(X) < \infty$ και η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, έστω από το M, τότε η ανισότητα ισχύει. Πράγματι, έχουμε $M - f_n \geq 0$ άρα, από η γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το Λήμμα

Fatou,

$$\int M d\mu - \int \limsup f_n d\mu = \int (M - \limsup f_n) d\mu = \int \liminf (M - f_n) d\mu$$
$$\leq \liminf \int (M - f_n) d\mu = \int M d\mu - \limsup \int f_n d\mu\,,$$

άρα $\limsup \int f_n \, d\mu \leq \int \limsup f_n \, d\mu$ αφού $\int M d\mu = M\mu(X) < \infty$.

13. (Απόλυτη συνέχεια) *Έστω μ, ν δύο μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ με $\nu \ll \mu$, δηλαδή*

$$A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Αν το ν είναι πεπερασμένο, αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \epsilon.$$

[Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli. Σημειώστε ότι το αντίστροφο ισχύει, ακόμα κι αν το ν δεν είναι πεπερασμένο.]

Υπόδειξη: Έστω ότι το συμπέρασμα δεν αληθεύει. Υπάρχει τότε $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να μπορώ να βρώ $A_n \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_n) < \frac{1}{n^2}$ αλλά $\nu(A_n) \geq \epsilon$. Επειδή $\sum \mu(A_n) < \infty$, έπεται από το λήμμα Borel-Cantelli ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$. Όμως αφού $\nu(A_n) \geq \epsilon$ για κάθε n έχουμε $\nu(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k) \geq \epsilon$ για κάθε n και συνεπώς, *αφού το ν είναι πεπερασμένο*, $\nu(\limsup A_n) = \lim\limits_n \nu(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k) \geq \epsilon$. Υπάρχει λοιπόν ένα $A \in \mathcal{A}$, το $A = \limsup A_n$, που ικανοποιεί $\mu(A) = 0$ αλλά $\nu(A) > 0$.

Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα όταν το ν δεν είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα, στον χώρο $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, αν ορίσουμε $\nu(A) = \int_A \frac{1}{x} d\lambda(x)$ τότε $\nu \ll \lambda$, αλλά για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι $\lambda([0, \frac{\delta}{2}]) < \delta$ ενώ $\nu([0, \frac{\delta}{2}]) = +\infty$.