Ασκήσεις για τις μετρήσιμες συναρτήσεις

1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $[f \leq q] \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } f(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη.

3. Έστω μια συνάρτηση $f : (0,1) \to [-\infty, \infty]$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ ο περιορισμός $f|_{(0,1-\varepsilon)}$ να είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

4. Δώστε παράδειγμα μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη, ενώ οι $|f|$ και f^2 είναι Lebesgue μετρήσιμες.

5. Αποδείξτε ότι το σύνολο E των σημείων ενός μετρήσιμου χώρου $(X, \mathcal{A})$ στα οποία μια ακολουθία f_n μετρησίμων συναρτήσεων συγκλίνει (δηλαδή, $E = \{x \in X : \text{ το όριο } \lim_n f_n(x) \text{ υπάρχει } \}$) είναι μετρήσιμο σύνολο.

6. Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (ή, γενικότερα, Borel μετρήσιμη), να δειχθεί ότι η σύνθεση $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

7. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor-Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $f \circ g$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

8. Θεωρώντας την συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,1]$ με $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + x)$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue, δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός του $[0,1]$ που δεν διατηρεί τα μηδενικά σύνολα.

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα αυτή της g, δείξτε επίσης ότι υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ που δεν είναι Borel μετρήσιμα.

9. Αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση, είναι αλήθεια ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) ώστε $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$; Για *κάθε* $x \in [0,1]$;