Καλώς ήρθατε στην Θεωρία Μέτρου!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH136/

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16

Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

Riemann: διαμέριση του $[a, b]$: $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \text{ και } U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

όπου
$m_k = \inf\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$ και $M_k = \sup\{f(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$.

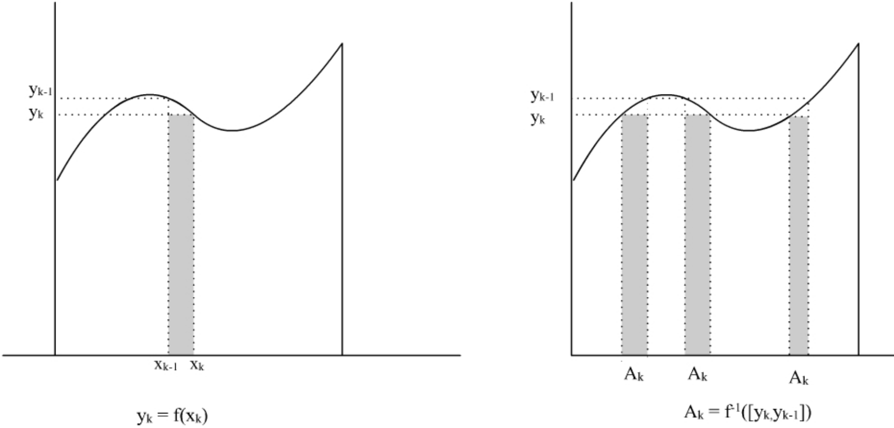
Lebesgue: διαμέριση του πεδίου τιμών $[m, M]$

$$Q = \{m = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_t = M\}.$$

$$\widetilde{L}(f, Q) = \sum_{k=0}^{t-1} y_k \mu(f^{-1}([y_k, y_{k+1}))) \text{ και } \widetilde{U}(f, Q) = \sum_{k=1}^{t-1} y_{k+1} \mu(f^{-1}([y_k, y_{k+1})))$$

μ = «μήκος» (;;) Θυμίζω:
$f^{-1}([y_k, y_{k+1})) = \{x \in [a, b] : y_k \le f(x) < y_{k+1}\}$).

Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue



Σίγμα άλγεβρες και μέτρα: $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$

Ορισμός

Αν $\Omega \neq \emptyset$ σύνολο, μια άλγεβρα υποσυνόλων του Ω είναι μια οικογένεια $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ που περιέχει το Ω και είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και πεπερασμένες ενώσεις (άρα και πεπερασμένες τομές), δηλαδή

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- *συμπληρώματα:* $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$
- *ενώσεις:* $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$

Μια άλγεβρα υποσυνόλων $\mathscr{S}$ του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν επιπλέον είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις (άρα και αριθμήσιμες τομές), δηλαδή

- $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{S} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}$

Το ζεύγος $(\Omega, \mathscr{S})$ λέγεται μετρήσιμος χώρος.

Σίγμα άλγεβρες και μέτρα: $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$

Ορισμός

Χώρος μέτρου είναι μια τριάδα $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ όπου:

- $\Omega \neq \emptyset$ *σύνολο,*
- $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ *μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του* Ω *και*
- $\mu : \mathscr{S} \to [0, +\infty]$ *ένα μέτρο, δηλαδή:*
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - *αριθμήσιμη προσθετικότητα: αν* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{S}$ *και* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *για* $n \neq m$ *τότε* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Ερώτημα: Υπάρχει πάντα μέτρο $\mu : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$;
Ερώτημα: Όταν $X = \mathbb{R}$, υπάρχει τέτοιο μέτρο με $\mu([a, b]) = b - a$;

Παραδείγματα

(1) Ω=δειγματικός χώρος, $\mathscr{S}$=ενδεχόμενα, μ=πιθανότητα.

(2) $\Omega = \mathbb{R}^d$ ή μια μπάλα, μ= «μέγεθος απλών υποσυνόλων» ($d = 1$: μήκος, $d = 2$: εμβαδόν, $d = 3$: όγκος), $\mathscr{S}$= όλα τα υποσύνολα που «έχουν μέγεθος»:
εδώ η $\mathscr{S}$ προσδιορίζεται από το μ.

Άλγεβρες και σίγμα άλγεβρες υποσυνόλων

Παρατηρήσεις

• *Αν* $\mathscr{A}$ *άλγεβρα στο* X, *τότε:* $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$ *(η* $\mathscr{A}$ *κλειστή στις συνολοθεωρητικές διαφορές).*
• *Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα. (Αντίστροφα: όχι)*

Παραδείγματα

- $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega\}, \ \mathscr{B} = \mathscr{P}(\Omega):$ σ-άλγεβρες
- $\mathscr{C} = \{A \subseteq \mathbb{N} :$ το A ή το A^c είναι πεπερασμένο$\}$

Η $\mathscr{C}$ είναι άλγεβρα στο $\mathbb{N}$, αλλά όχι σ-άλγεβρα.

- Στο $\mathbb{R}$, η οικογένεια $\mathscr{D}$ που αποτελείται από τις πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων του $\mathbb{R}$ είναι άλγεβρα αλλά όχι σ-άλγεβρα.

(Η οικογένεια $\mathscr{E}$ που αποτελείται μόνον από (όλα τα) διαστήματα του $\mathbb{R}$ δεν είναι άλγεβρα.)

σ-άλγεβρες

Πρόταση

Έστω X ένα σύνολο και $\mathscr{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Η $\mathscr{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X αν (και μόνον αν) ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) *Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}$ στην $\mathscr{A}$ ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.*

(ii) *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}$ στην $\mathscr{A}$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.*

(iii) *Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathscr{A}$ ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.*

σ-άλγεβρες

Παρατήρηση Έστω $\{A_1, A_2, \dots\} \subseteq \mathscr{P}(X)$.

- Θέτω $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Τότε $B_n \subseteq B_{n+1}$ (η (B_n) αύξουσα) και

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, μάλιστα $\bigcup_{n=1}^{N} B_n = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

- Θέτω $C_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Τότε $C_n \supseteq C_{n+1}$ (η (C_n) φθίνουσα) και

$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, μάλιστα $\bigcap_{n=1}^{N} C_n = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

- Θέτω $D_1 = A_1$ και, για $n \geq 2$, $D_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$.

Τότε $D_n \cap D_m = \emptyset$ όταν $m \neq n$ (ξένα ανά δύο), $D_n \subseteq A_n \, \forall n$
και $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, μάλιστα $\bigcup_{n=1}^{N} D_n = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

Η παραγόμενη σ-άλγεβρα

Πρόταση

Αν $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε υπάρχει η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{F})$ στο X που περιέχει την $\mathscr{F}$, δηλαδή αν $\mathscr{A}$ μια άλλη σ-άλγεβρα με $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}$ τότε $\sigma(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{A}$.

Απόδειξη (1) Υπάρχει μία. (2) Τομή σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα.

Βασικό Παράδειγμα

Αν $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών συνόλων σ' έναν μετρικό (ή τοπολογικό) χώρο X, η παραγόμενη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathscr{T})$ ονομάζεται σ-άλγεβρα των υποσυνόλων Borel και συμβολίζεται $\mathscr{B}(X)$.

Η σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathbb{R})$

Πρόταση

Έστω

$$\mathscr{C} = \{C \subseteq \mathbb{R} : C \ \textit{κλειστό}\},$$

$$\Delta_1 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\},$$

$$\Delta_2 = \{(a, b] : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$\Delta_3 = \{(a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3).$$

Θα δείξουμε ότι

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma(\mathscr{F}) \supseteq \sigma(\Delta_1) \supseteq \sigma(\Delta_2) \supseteq \sigma(\Delta_3) \supseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Η σ-άλγεβρα $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$

Πρόταση

Έστω

$$\mathscr{C} = \{C \subseteq \mathbb{R}^d : C \ \textit{κλειστό}\},$$

$$\Delta_1 = \{\prod_{j=1}^{d}(-\infty, b_j] : b_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \ldots, d\},$$

$$\Delta_2 = \{\prod_{j=1}^{d}(a_j, b_j] : a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \ldots, d\},$$

$$\Delta_3 = \{\prod_{j=1}^{d}(a_j, b_j) : a_j < b_j,\ a_j, b_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \ldots, d\}.$$

Τότε

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3).$$

Παραδείγματα μέτρων

Έστω $(X, \mathscr{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος.

(α΄) Για $A \in \mathscr{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{αν το } A \text{ έχει } n \text{ το πλήθος στοιχεία} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1}$$

Το μ είναι μέτρο. Λέγεται αριθμητικό μέτρο.

(β΄) Για $A \in \mathscr{A}$ ορίζουμε

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Το ν είναι επίσης μέτρο.
(γ΄) Για $x \in X$ και $A \in \mathscr{A}$ ορίζουμε

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Το δ_x είναι μέτρο και λέγεται μέτρο Dirac στο x.

Το μέτρο Lebesgue

Παρατήρηση: Τα προηγούμενα μπορούν να ορισθούν σε οποιαδήποτε σ-άλγεβρα, άρα και στο $\mathscr{P}(X)$.

Θεώρημα

Υπάρχει ένα μέτρο $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ *ώστε* $\lambda([a, b]) = b - a$.

Απόδειξη ;
Πέρα από τα Borel;
Σε όλο το $\mathscr{P}(\mathbb{R})$;

Πρώτες ιδιότητες μέτρου

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

(i) *Το μ είναι μονότονο, δηλαδή αν για $A, B \in \mathscr{A}$ ισχύει $A \subseteq B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(ii) *Αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Το (ii) δεν έχει νόημα αν $\mu(A) = \infty$. Τότε $\mu(B) = \infty$ από το (i) ενώ το $\mu(B \setminus A)$ μπορεί να είναι πεπερασμένος αριθμός ή το άπειρο.

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ είναι αριθμήσιμα υποπροσθετικό (ή σ-υποπροσθετικό), δηλαδή αν (A_n) τυχούσα ακολουθία στοιχείων της $\mathscr{A}$, τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Πρώτες ιδιότητες μέτρου

Πρόταση

Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου.

(i) *Αν (A_n) αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathscr{A}$, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ii) *Αν A_n φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathscr{A}$ και επιπλέον $\mu(A_1) < \infty$, τότε*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Παράδειγμα Αν μ το αριθμητικό μέτρο στο $(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ και $A_m = \{m, m+1, \ldots\}$, τότε $\mu(A_m) = \infty$ για κάθε m, ενώ $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \mu(\emptyset) = 0$.

Πρώτες ιδιότητες μέτρου

Χρήσιμη:

Πρόταση

Έστω μ ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X,\mathscr{A})$. Το μ είναι μέτρο αν (και μόνον αν) ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) *Για κάθε αύξουσα ακολουθία (A_n) στοιχείων της $\mathscr{A}$ ισχύει*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

ή

(ii) *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία (A_n) στοιχείων της $\mathscr{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ισχύει*

$$\lim_n \mu(A_n) = 0.$$

Πεπερασμένα και σ-πεπερασμένα μέτρα

Ορισμός

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μέτρο μ λέγεται:

(i) *πεπερασμένο αν $\mu(X) < \infty$, (οπότε $\mu(A) < \infty \, \forall A \in \mathscr{A}$)*

(ii) *μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$ και*

(iii) *σ-πεπερασμένο αν υπάρχει ακολουθία (A_n) στοιχείων της $\mathscr{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$*

(Την (A_n) μπορείς να την πάρεις αύξουσα, ή ξένα ανα δύο, αν θες.)

Πλήρωση χώρου μέτρου

Ορισμός

Έστω $(X,\mathscr{A},\nu)$ χώρος μέτρου και $N \subseteq X$. Το N καλείται ν-μηδενικό σύνολο (null set) αν υπάρχει ένα $A \in \mathscr{A}$ με $N \subseteq A$ και $\nu(A) = 0$.

Ο $(X,\mathscr{A},\nu)$ καλείται πλήρης (και το ν πλήρες μέτρο) αν κάθε ν-μηδενικό σύνολο N ανήκει στην $\mathscr{A}$.

Ορίζουμε

$$\mathscr{A}_\nu := \{A \subseteq X : \text{ υπάρχουν } E,F \in \mathscr{A} \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \nu(F \setminus E) = 0\}.$$

και

$$\overline{\nu} : \mathscr{A}_\nu \to [0,+\infty]$$
$$\overline{\nu}(A) := \sup\{\nu(B) : B \in \mathscr{A},\ B \subseteq A\} \ (= \nu(E) = \nu(F)).$$

Η τριάδα $(X,\mathscr{A}_\nu,\overline{\nu})$ λέγεται πλήρωση του $(X,\mathscr{A},\nu)$.
Τα στοιχεία της $\mathscr{A}_\nu$ λέγονται ν-μετρήσιμα σύνολα. Κάθε ν-μηδενικό σύνολο είναι ν-μετρήσιμο.

Πλήρωση χώρου μέτρου

Πρόταση

Έστω $(X,\mathscr{A},\nu)$ ένας χώρος μέτρου. Τότε η πλήρωσή του έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) *Η $\mathscr{A}_\nu$ είναι σ-άλγεβρα στο X και $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}_\nu$.*

(ii) *Τό $\overline{\nu}$ είναι πλήρες μέτρο στο χώρο $(X,\mathscr{A}_\nu)$ και ο περιορισμός του στην $\mathscr{A}$ είναι το ν, δηλαδή $\overline{\nu}|_{\mathscr{A}} = \nu$.*

(iii) *Το $\overline{\nu}$ είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathscr{A}_\nu$ με $\overline{\nu}|_{\mathscr{A}} = \nu$.*

(iv) *Το ν είναι πλήρες μέτρο $\Leftrightarrow \mathscr{A}_\nu = \mathscr{A}$ (και άρα $\overline{\nu} = \nu$).*

Μοναδικότητα

Έστω $(X,\mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ μέτρο στον $(X,\mathscr{A})$. Πότε το μ καθορίζεται από τις τιμές του $\mu|_\Delta$ σε μια κατάλληλη $\Delta \subseteq \mathscr{A}$;

Πρόταση (Θεώρημα Μοναδικότητας)

Αν δύο μέτρα μ και ν σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X,\mathscr{A})$ ταυτίζονται σε μια οικογένεια $\Delta \subseteq \mathscr{A}$, κλειστή στις πεπερασμένες τομές και τέτοια ώστε $\sigma(\Delta) = \mathscr{A}$, και αν επιπλέον

(i) *Τα μ και ν είναι πεπερασμένα και $\mu(X) = \nu(X)$,*
ή

(ii) *Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην Δ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ και $\mu(D_n) = \nu(D_n) < \infty$ για κάθε n,*

τότε $\mu = \nu$.

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Καθε $A \subseteq \mathbb{R}$ μπορεί να καλυφθεί από αριθμήσιμα το πλήθος ανοικτά και φραγμένα διαστήματα, δηλαδή υπάρχουν $I_n = (a_n, b_n)$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Ορισμός

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : \ a_n, b_n \in \mathbb{R}, \ \textit{και} \ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right\},$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$.

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Πρόταση

(i) *Ισχύει* $\lambda^*(\emptyset) = 0$,

(ii) *το* λ^* *είναι μονότονο, δηλαδή αν* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ *τότε* $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ *και*

(iii) *το* λ^* *είναι αριθμήσιμα υποπροσθετικό (ή σ-υποπροσθετικό), δηλαδή αν* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$, *τότε*

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Πρόταση (!)

Αν $a \leq b$, *τότε*
$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*([a,b)) = \lambda^*((a,b]) = \lambda^*((a,b)) = b - a.$

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

$\lambda^*(A) = \inf \{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : \ a_n, b_n \in \mathbb{R}, \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\}$,
για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις

• Κάθε μη φραγμένο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ έχει $\lambda^*(I) = +\infty$.

• Κάθε πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει $\lambda^*(A) = 0$.
Αλλά υπάρχουν και υπεραριθμήσιμα σύνολα (πχ. σύνολο Cantor - δες αργότερα) $B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(B) = 0$!

Εξωτερικά μέτρα

Ορισμός

Έστω X ένα σύνολο. Μια συνάρτηση $\varphi : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο αν:

(i) *Ισχύει $\varphi(\emptyset) = 0$,*

(ii) *η φ είναι μονότονη, δηλαδή αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ και*

(iii) *η φ είναι αριθμήσιμα υποπροσθετική (ή σ-υποπροσθετική), δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε*

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Κάθε μέτρο είναι και εξωτερικό μέτρο.

Μετρήσιμα σύνολα

Ορισμός

Έστω $\phi : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *ένα εξωτερικό μέτρο. Ένα* $B \subseteq \Omega$ *λέγεται* ϕ-***μετρήσιμο*** *αν*

$$\text{για } \textbf{κάθε } A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

$$\text{Θέτουμε} \quad \mathscr{M}_\phi = \{B \subseteq \Omega : \ B \ \phi\text{-μετρήσιμο}\}.$$

Παρατήρηση

Έστω $B \subseteq \Omega$.

- *Αν* $\phi(B) = 0$, *τότε* $B \in \mathscr{M}_\phi$.
- *Για να δείξω ότι* $B \in \mathscr{M}_\phi$, *αρκεί να δείξω ότι*

$$\text{για κάθε } A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) \geq \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

- *Μάλιστα αρκεί να το δείξω για κάθε* A *με* $\phi(A) < \infty$.

Μετρήσιμα σύνολα

Θεώρημα (Καραθεοδωρή)

Αν ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο Ω, τότε

- *Η $\mathscr{M}_\phi$ είναι σ-άλγεβρα και*
- *Το $\phi|_{\mathscr{M}_\phi}$ είναι πλήρες μέτρο.*

(;;) Δες την Απόδειξη.
ή
(;;) Πήγαινε στο επόμενο.

Απόδειξη Θ. Καραθεοδωρή, Βήμα 1

$$\text{για } \textbf{κάθε } A \subseteq \Omega, \qquad \phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c).$$

Θέτουμε $\mathscr{M}_\phi = \{B \subseteq \Omega : \ B \ \phi\text{-μετρήσιμο}\}$.

Βήμα 1: $\mathscr{M}_\phi$ άλγεβρα

(α) $\Omega \in \mathscr{M}_\phi$: προφανές.

(β) Αν $B \in \mathscr{M}_\phi$, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c)\\ &= \phi(A \cap (B^c)^c) + \phi(A \cap B^c)\end{aligned}$$

άρα $B^c \in \mathscr{M}_\phi$.

(γ) Αν $B_1, B_2 \in \mathscr{M}_\phi$, ν.δ.ο. $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{M}_\phi$: Έστω $A \subseteq \Omega$.

$$B_1 \in \mathscr{M}_\phi \Rightarrow \phi(A) = \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_1^c). \tag{2}$$

$$B_2 \in \mathscr{M}_\phi \Rightarrow \phi(A \cap B_1) = \phi((A \cap B_1) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1) \cap B_2^c) \tag{3}$$

οπότε η (;;) γίνεται

$$\phi(A) = \phi((A \cap B_1) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1) \cap B_2^c) + \phi(A \cap B_1^c). \tag{4}$$

$$\text{Αλλά}\quad B_1 \cap B_2^c = B_1 \setminus B_2 = B_1 \setminus (B_1 \cap B_2) = B_1 \cap (B_1 \cap B_2)^c$$
$$\text{και}\quad B_1^c = B_1^c \cap (B_1 \cap B_2)^c \quad (\text{διότι } B_1^c \subseteq (B_1 \cap B_2)^c)$$

οπότε η (;;) γίνεται

$$\phi(A) = \phi((A \cap B_1) \cap B_2) + \phi((A \cap B_1) \cap (B_1 \cap B_2)^c) + \phi(A \cap B_1^c \cap (B_1 \cap B_2)^c)$$

ξανά:

$$\phi(A)=\phi((A\cap B_1)\cap B_2)+\phi((A\cap B_1)\cap(B_1\cap B_2)^c)+\phi(A\cap B_1^c\cap(B_1\cap B_2)^c)$$

Αν $C\equiv A\cap(B_1\cap B_2)^c$,

$$B_1\in\mathscr{M}_\phi\Rightarrow\phi(C)=\phi(C\cap B_1)+\phi(C\cap B_1^c)$$

δηλ. $\phi(A\cap(B_1\cap B_2)^c)=\phi(A\cap B_1\cap(B_1\cap B_2)^c)+\phi(A\cap B_1^c\cap(B_1\cap B_2)^c)$

οπότε αντικαθιστώντας

$$\phi(A)=\phi(A\cap(B_1\cap B_2))+\phi(A\cap(B_1\cap B_2)^c)$$

άρα, εφόσον το $A\subseteq\Omega$ είναι τυχόν, $B_1\cap B_2\in\mathscr{M}_\phi$.

Απόδειξη Θ. Καραθεοδωρή, Βήμα 2

Βήμα 2: $\phi|_{\mathscr{M}_\phi}$ πεπ. προσθετικό.
Αν $B_1, B_2 \in \mathscr{M}_\phi$, και $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, τότε για κάθε $A \subseteq \Omega$, θέτοντας $C = A \cap (B_1 \cup B_2)$ έχουμε, αφού $B_1 \in \mathscr{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}
\phi(A \cap (B_1 \cup B_2)) &= \phi(C) = \phi(C \cap B_1) + \phi(C \cap B_1^c) \\
&= \phi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \phi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) \\
&= \phi(A \cap B_1) + \phi(A \cap B_2)
\end{aligned}$$

(διότι $(B_1 \cup B_2) \cap B_1 = B_1$ και $(B_1 \cup B_2) \cap B_1^c = B_2$ αφού $B_1 \cap B_2 = \emptyset$).
Ειδικότερα, $\phi(B_1 \cup B_2) = \phi(B_1) + \phi(B_2)$.

Βήμα 3. $\mathscr{M}_\phi$ σ-άλγεβρα και $\phi|_{\mathscr{M}_\phi}$ σ-προσθετικό.
Αν $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathscr{M}_\phi$ είναι ξένα ανά δύο και $B = \bigcup_n B_n$, θα δείξω ότι για κάθε $A \subseteq \Omega$,

$$\phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi(A \cap B^c) \quad (5)$$

οπότε

$$\phi(A) = \phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c)$$

άρα $B \in \mathscr{M}_\phi$ και

$$\phi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(B_n)$$

άρα το $\phi|_{\mathscr{M}_\phi}$ είναι σ-προσθετικό.

Απόδειξη Θ. Καραθεοδωρή

Πράγματι, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, επειδή $\bigcup_{n=1}^{N} B_n \in \mathscr{M}_\phi$,

$$\begin{aligned}
\phi(A) &= \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)\right) + \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c\right) \quad \text{(Βήμα 2)} \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right)
\end{aligned}$$

διότι $A \cap B^c \subseteq A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)^c$. Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε $N \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right) \overset{(*)}{\geq} \phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)\right) + \phi\left(A \cap B^c\right)$$

(*): λόγω της σ-υποπροσθετικότητας του ϕ.

ξανά:

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)\right) + \phi\left(A \cap B^c\right)$$

Αλλά $\cup_n (A \cap B_n) = A \cap (\cup_n B_n) = A \cap B$, άρα

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)\right) + \phi\left(A \cap B^c\right) = \phi(A \cap B) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A)$$

πάλι από την υποπροσθετικότητα. Δηλαδή

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A \cap B_n) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A \cap B) + \phi\left(A \cap B^c\right) \geq \phi(A)$$

συνεπώς ισχύει ισότητα, και η (;;) αποδείχθηκε.

Απόδειξη Θ. Καραθεοδωρή, Τέλος

Το $\phi|_{\mathscr{M}_\phi}$ είναι πλήρες μέτρο:
Αν $B \subseteq \Omega$ έχει $\phi(B) = 0$, τότε $B \in \mathscr{M}_\phi$ διότι:

για κάθε $A \subseteq \Omega$,

$$\phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) \leq \phi(B) + \phi(A) = 0 + \phi(A)$$

από μονοτονία, άρα $\phi(A \cap B) + \phi(A \cap B^c) = \phi(A)$. $\square$

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$

Ανοικτό φραγμένο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}^k$:

$$I = \prod_{j=1}^{k} (a_j, b_j) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_k, b_k)$$

όπου $a_j \leq b_j \in \mathbb{R}$.
Ο όγκος του διαστήματος I είναι

$$\mathrm{v}(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_k - a_k).$$

Γενικότερα, διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ είναι ένα σύνολο $I = \prod_{j=1}^{k} I_j$, όπου $I_1, I_2, \ldots, I_k$ διαστήματα στο $\mathbb{R}$ και ο όγκος του είναι το γινόμενο των μηκών των διαστημάτων I_j (με τη σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$).

Ορισμός

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda_k^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_k^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) : \ I_n \subseteq \mathbb{R}^k \ \textit{αν. φρ. διάστ. και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$.

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$

Πρόταση

Το $\lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^k) \to [0,\infty]$ είναι πράγματι ένα εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}^k$.

Απόδειξη: Ίδια με την περίπτωση $k = 1$.

Πρόταση

Για κάθε I διάστημα του $\mathbb{R}^k$ ισχύει $\lambda^*(I) = \mathrm{v}(I)$.

Απόδειξη: Όπως στην περίπτωση $k = 1$, με ένα επιχείρημα συμπάγειας το πρόβλημα ανάγεται στην απόδειξη του εξής:

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$

Λήμμα

(i) *Η οικογένεια Δ των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ που γράφονται ως πεπερασμένες ξένες ενώσεις διαστημάτων (φραγμένων ή μη, ανοικτών ή μη) είναι μια άλγεβρα στον $\mathbb{R}^k$.*

(ii) *Έστω I_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ ξένα διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$ η ένωσή τους και J ένα διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ ώστε $I \subseteq J$. Τότε*

$$\sum_{j=1}^n v(I_j) \leq v(J)$$

και αν επιπλέον το I είναι διάστημα τότε

$$\sum_{j=1}^n v(I_j) = v(I).$$

Το μέτρο Lebesgue

Ορισμός

Τα στοιχεία της σ-άλγεβρας $\mathscr{M}_{\lambda^*}$ λέγονται Lebesgue μετρήσιμα σύνολα και ο περιορισμός $\lambda := \lambda^*|_{\mathscr{M}_{\lambda^*}}$ λέγεται μέτρο Lebesgue.

Πρόταση

Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathscr{M}_{\lambda^*}$.

Ερωτήσεις: (1) Υπάρχει διαφορά; Δηλ. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \overset{?}{\subsetneqq} \mathscr{M}_{\lambda^*}$;

(2) Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι μετρήσιμα; Δηλ. $\mathscr{M}_{\lambda^*} \overset{?}{\subsetneqq} \mathscr{P}(\mathbb{R}^k)$;

Το μέτρο Lebesgue

Αν $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ γράφω $A + x = \{a + x : a \in A\}$. Αν $I \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι διάστημα, προφανώς το $I + x$ είναι διάστημα και $\lambda(I + x) = \lambda(I)$.
Επίσης, αν $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ τότε $A + x \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ και $\lambda(A + x) = \lambda(A)$.

Παρατήρηση

Το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}^k, \mathscr{M}_{\lambda^*})$ *είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, δηλαδή ένα σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *ανήκει στην* $\mathscr{M}_{\lambda^*}$ *αν και μόνον αν* $(A + x) \in \mathscr{M}_{\lambda^*}$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^k$*, και ισχύει* $\lambda(A) = \lambda(A + x)$.

Θεώρημα (Vitali)

Υπάρχουν σύνολα $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμα (για κάθε* k*).*

Εσωτερικό και εξωτερικό μέτρο

Ορισμός

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Για $A \subseteq X$ τυχόν ορίζουμε:

(i) *το εξωτερικό μέτρο του A ως προς μ:*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathscr{A} \text{ και } B \supseteq A\}$$

(ii) *το εσωτερικό μέτρο του A ως προς μ:*

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathscr{A} \text{ και } C \subseteq A\}.$$

Από τη μονοτονία του μ έχουμε $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ για κάθε $A \subseteq X$. Αν επιπλέον $A \in \mathscr{A}$, τότε $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$ (σ-προσθετικότητα).

Εσωτερικό και εξωτερικό μέτρο

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το εξωτερικό μέτρο μ^* του μ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) *Για κάθε $A \subseteq X$ υπάρχει $B \in \mathscr{A}$ με $A \subseteq B$ και $\mu^*(A) = \mu(B)$.*

(ii) *Η συνάρτηση $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ είναι ένα εξωτερικό μέτρο.*

Αν $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)), \lambda)$ τότε το εξωτερικό μέτρο που ορίζει το λ σύμφωνα με τον τελευταίο ορισμό είναι το γνωστό μας εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

Εσωτερικό και εξωτερικό μέτρο

Υπενθύμιση:

$$\mathscr{A}_\mu := \{A \subseteq X : \text{ υπάρχουν } E, F \in \mathscr{A} \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = 0\}.$$

και

$$\overline{\mu} : \mathscr{A}_\mu \to [0, +\infty]$$
$$\overline{\mu}(A) := \sup\{\mu(B) : B \in \mathscr{A},\ B \subseteq A\}\ \ (= \mu(E) = \mu(F)).$$

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < \infty$. Τότε

$$A \in \mathscr{A}_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu_*(A) = \mu^*(A)\ \ (= \overline{\mu}(A)).$$

Κατασκευή εξωτερικών μέτρων

Ορισμός

Έστω $X \neq \emptyset$. *Μια οικογένεια* $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *υποσυνόλων του* X *λέγεται σ-κάλυψη του* X *αν*

(i) $\emptyset \in \mathscr{C}$ *και*

(ii) *για κάθε* $A \subseteq X$ *υπάρχουν* $C_1, C_2, \ldots \in \mathscr{C}$ *ώστε* $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Θεώρημα (Κατασκευής εξωτερικών μέτρων)

Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathscr{C}$ *μια σ-κάλυψη του* X *και* $\tau : \mathscr{C} \to [0,\infty]$ *μια συνάρτηση με* $\tau(\emptyset) = 0$. *Η συνάρτηση* $\varphi : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ *με*

$$\varphi(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) : \ C_n \in \mathscr{C} \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}$$

για $A \subseteq X$, *είναι ένα εξωτερικό μέτρο στο* X.

Το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή

Ένα «μέτρο» ορισμένο σε άλγεβρα επεκτείνεται στην παραγόμενη σ-άλγεβρα:

Ορισμός

Έστω X ένα σύνολο και $\mathscr{A}_0$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Μια συνάρτηση $\mu_0 : \mathscr{A}_0 \to [0,\infty]$ λέγεται προμέτρο (premeasure) στο σύνολο X αν:

(i) *Ισχύει $\mu_0(\emptyset) = 0$ και*

(ii) *Αν $A_1, A_2, \ldots$ μια ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathscr{A}_0$ για τα οποία επιπλέον ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}_0$, τότε*

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Ειδικότερα, κάθε προμέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό στην άλγεβρα $\mathscr{A}_0$.

Το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή

Θεώρημα (Θεώρημα Επέκτασης)

Έστω X *ένα σύνολο,* $\mathscr{A}_0$ *μια άλγεβρα στο* X, $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{A}_0)$ *η* σ*-άλγεβρα που παράγει η* $\mathscr{A}_0$ *και* μ_0 *ένα προμέτρο στην* $\mathscr{A}_0$*. Θεωρούμε τη συνάρτηση* $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ *που ορίζεται ως*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : A_n \in \mathscr{A}_0 \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \quad A \subseteq X$$

Τότε

(i) *Η* μ^* *είναι ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο* X*.*

(ii) *Για* $A \in \mathscr{A}_0$ *είναι* $\mu^*(A) = \mu_0(A)$*.*

(iii) *Αν* $\mathscr{M}_{\mu^*}$ *η* σ*-άλγεβρα των* μ^**-μετρήσιμων συνόλων τότε*

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M}_{\mu^*}.$$

Συνεπώς το $\mu = \mu^*|_{\mathscr{A}}$ είναι ένα μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{A})$ που επεκτείνει το μ_0.

Το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή

Επιπλέον, ισχύει και η ακόλουθη μορφή μοναδικότητας:

Πρόταση

Με τους συμβολισμούς του Θεωρήματος επέκτασης,

(iv) *Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο, δηλαδή αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία (F_n) στην $\mathscr{A}_0$ με $X = \bigcup_n F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε n, τότε το μ είναι το μοναδικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{A})$ που επεκτείνει το μ_0.*

Μέτρα Borel στο $\mathbb{R}$ και συναρτήσεις κατανομής

Παρατήρηση Αν μ είναι ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση κατανομής του μ:

$$F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad F_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$$

είναι φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής (δηλ. για κάθε s, $\lim_{t \searrow s} F_\mu(t) = F_\mu(s)$) και ικανοποιεί $\lim_{t \to -\infty} F_\mu(t) = 0$. Αντίστροφα,

Θεώρημα

Αν $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής και ικανοποιεί $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$, τότε υπάρχει μοναδικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_F στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$F(x) = \mu_F((-\infty, x]) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a), \quad a < b.$$

Κανονικότητα

Ορισμός

Έστω (X,d) *ένας μετρικός χώρος,* $\mathscr{A}$ *μια* σ*-άλγεβρα στο* X *ώστε* $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B}(X)$ *και* μ *ένα μέτρο στο μετρήσιμο χώρο* $(X,\mathscr{A})$. *Το μέτρο* μ *λέγεται* ***κανονικό μέτρο*** *αν:*

(i) $\mu(K) < \infty$ *για κάθε* $K \subseteq X$ *συμπαγές.*

(ii) *Το* μ *ικανοποιεί τη συνθήκη* ***εξωτερικής κανονικότητας****, δηλαδή για κάθε* $A \in \mathscr{A}$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό στο } X \text{ και } U \supseteq A\}.$$

(iii) *Το* μ *ικανοποιεί τη συνθήκη* ***εσωτερικής κανονικότητας για ανοικτά σύνολα****, δηλαδή για κάθε* $G \subseteq X$ *ανοικτό,*

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq G\}.$$

Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Θεώρημα

Το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^k$ είναι κανονικό μέτρο. Επιπλέον, η εσωτερική κανονικότητα

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}$$

ισχύει για κάθε $A \in \mathscr{M}_{\lambda^*}$ (όχι μόνο για τα ανοικτά).

Πρόταση

Το μέτρο Lebesgue στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathscr{M}_{\lambda^*})$ είναι η πλήρωση του μέτρου Lebesgue στον $(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}(\mathbb{R}^k))$.

Στην πραγματικότητα ισχύουν οι εξής ισοδυναμίες:

$$A \in \mathscr{M}_{\lambda^*} \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } E \supseteq A \text{ σύνολο } G_\delta \text{ με } \lambda(E \setminus A) = 0$$

και

$$A \in \mathscr{M}_{\lambda^*} \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } F \subseteq A \text{ σύνολο } F_\sigma \text{ με } \lambda(A \setminus F) = 0.$$

Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Ορισμός

Έστω (X,d) μετρικός (ή τοπολογικός) χώρος. Κάθε μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X,\mathscr{B}(X))$ λέγεται μέτρο Borel στον X.

Πρόταση

Το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ ώστε

$$\lambda(I) = v(I), \text{ για κάθε διάστημα } I \text{ στον } \mathbb{R}^k.$$

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ Lebesgue μετρήσιμο με $\lambda(A) < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα $J_1, J_2, \dots, J_m$ ώστε

$$\lambda(A \triangle (J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_m)) < \varepsilon.$$

: Κάθε μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$ είναι «σχεδόν ίσο» με πεπερασμένη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων.

Μέτρο Lebesgue και δράση της $\mathbb{R}^k$

Το λ είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές. Το ίδιο ισχύει και για κάθε θετικό πολλαπλάσιο του λ. Αντίστροφα:

Θεώρημα

Έστω μ ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ αναλλοίωτο στις μεταφορές διαστημάτων, δηλαδή με

$$\mu(I+x)=\mu(I),\ \text{για κάθε διάστημα } I \ \text{ και κάθε } x\in\mathbb{R}^k$$

και $\mu(K)<\infty$ για κάθε $K\subseteq\mathbb{R}^k$ συμπαγές. Τότε υπάρχει $a\geq 0$ ώστε $\mu=a\cdot\lambda$, δηλαδή

$$\mu(A)=a\cdot\lambda(A),\ \text{για κάθε } A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^k).$$

Μέτρο Lebesgue και δράση της $\mathbb{R}^k$

Ένα μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου μπορεί να μην περιέχει ανοικτό ($\neq \emptyset$) διάστημα (πχ. σύνολο τύπου Cantor, δες πιό κάτω). Όμως,

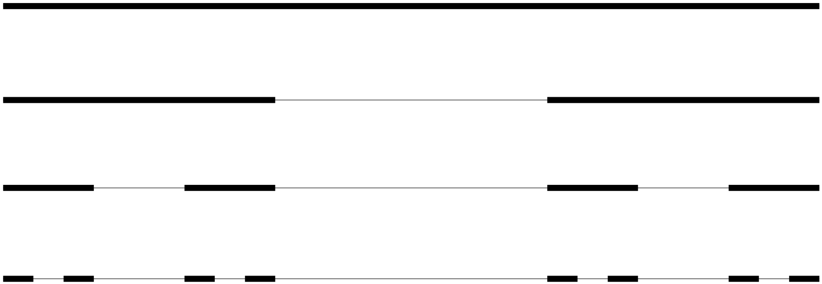
Θεώρημα (Steinhaus)

Αν A ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$B(0,\delta) \subseteq A - A.$$

Το σύνολο Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

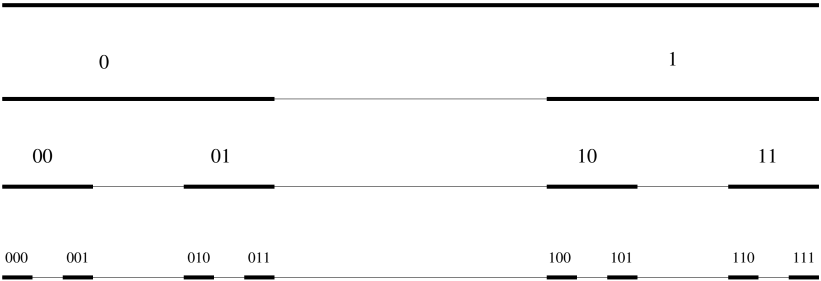
$$
\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1] \\
C_2 &= [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$



Το σύνολο Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

Παρατήρηση

Το σύνολο Cantor έχει μέτρο Lebesgue μηδέν και είναι κλειστό και έχει κενό εσωτερικό. Είναι όμως υπεραριθμήσιμο.



Το σύνολο Cantor

Παρατήρηση

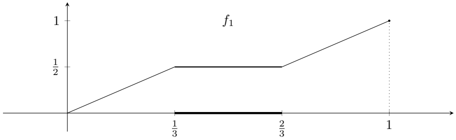
Το σύνολο Cantor είναι τέλειο, δηλαδή είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

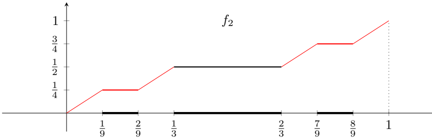
Παρατήρηση

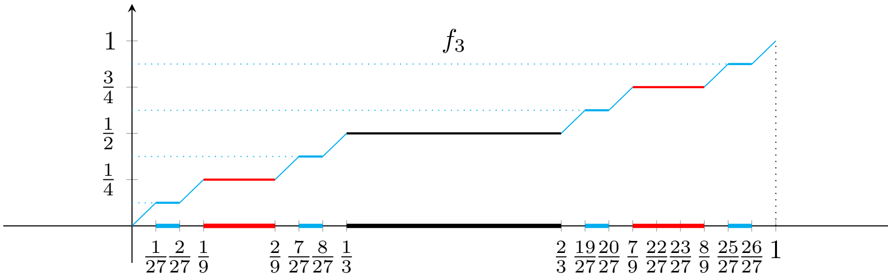
Για κάθε $a \in (0,1)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο «τύπου Cantor» (δηλ. συμπαγές, με κενό εσωτερκό, χωρίς μεμονωμένα σημεία) C^a με μέτρο a.

Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue ή «σκάλα του διαβόλου»

Πρώτα βήματα:







Πρόταση

Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση* $f : [0,1] \to [0,1]$*. Η* f *είναι αύξουσα και επί του* $[0,1]$*.*
Η f *είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη: για κάθε* x *στο (ανοικτό) σύνολο* C^c*, υπάρχει η* $f'(x)$*, μάλιστα* $f'(x) = 0$*.*
Η εικόνα του C *μέσω της* f *έχει μέτρο* $\lambda(f(C)) = 1$*.*

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω $(X,\mathscr{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος.
Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty,\infty]$ λέγεται μετρήσιμη ως προς $\mathscr{A}$ (ή $\mathscr{A}$-μετρήσιμη) αν

$$f^{-1}([-\infty,b]) \in \mathscr{A}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήσεις

(i) $[f \leq b] := f^{-1}([-\infty,b]) = \{x \in X : f(x) \leq b\}$

(ii) Αν μ ένα μέτρο στο χώρο $(X,\mathscr{A})$ η f λέγεται *μ-μετρήσιμη* αν είναι $\mathscr{A}_\mu$-μετρήσιμη.

(iii) Ειδικότερα, αν $X = \mathbb{R}^k$ κάθε λ-μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται *Lebesgue μετρήσιμη*.

(iv) Αν ο X είναι μετρικός χώρος και η f είναι $\mathscr{B}(X)$-μετρήσιμη, τότε η f λέγεται *Borel μετρήσιμη*.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η* f *είναι* $\mathscr{A}$*-μετρήσιμη.*
2. $f^{-1}([-\infty, b)) \in \mathscr{A}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.
3. $f^{-1}([b, +\infty)) \in \mathscr{A}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.
4. $f^{-1}((b, +\infty)) \in \mathscr{A}$ *για κάθε* $b \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και* $B \subseteq X$. *Η συνάρτηση* $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ *με*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \notin B \end{cases}$$

είναι η ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** *του συνόλου* B. *Η* χ_B *είναι* $\mathscr{A}$*-μετρήσιμη αν και μόνον αν* $B \in \mathscr{A}$.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

(α) Αν $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ τότε

$$f \text{ συνεχής } \Rightarrow f \text{ Borel μετρήσιμη } \Rightarrow f \text{ Lebesgue μετρήσιμη.}$$

(β) Αν I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα (ή φθίνουσα) συνάρτηση τότε η f είναι Borel μετρήσιμη.

Παράδειγμα Η $\chi_{[0,1]}$ είναι Borel, όχι συνεχής.
Η χ_A όπου $A \in \mathscr{M}_{\lambda^*} \setminus \mathscr{B}(\mathbb{R})$ είναι Lebesgue μετρήσιμη, όχι Borel.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός

Αν $(X, \mathscr{A})$ *μετρήσιμος χώρος και* $C \subseteq X$, *μια* $f : C \to [-\infty, \infty]$ *λέγεται μετρήσιμη αν για κάθε* $b \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $[f \leq b] \in \mathscr{A}_c$ *όπου* $\mathscr{A}_c = \{A \cap C : A \in \mathscr{A}\}$.

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A})$ *μετρήσιμος χώρος. Αν* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *είναι μετρήσιμη τότε για κάθε* $C \subseteq X$ *η* $f|_C$ *είναι μετρήσιμη.*

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A})$ *μετρήσιμος χώρος,* $C_n \in \mathscr{A}$ *με* $\cup_n C_n = X$. *Μια συνάρτηση* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν όλες οι* $f|_{C_n}$ *είναι μετρήσιμες.*

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Έστω (X, d) μετρικός (ή τοπολογικός) χώρος και $Y \subseteq X$. Τότε

(i) $\mathscr{B}(X)_Y = \mathscr{B}(Y)$ *(δηλ.* $\mathscr{B}(Y) = \{B \cap Y : B \in \mathscr{B}(X)\}$ *και*

(ii) *Αν μια* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *είναι Borel τότε η* $f|_Y : Y \to [-\infty, \infty]$ *είναι Borel.*

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *f μετρήσιμη*

(β) *για κάθε $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, το $f^{-1}(G)$ ανήκει στην $\mathscr{A}$*

(γ) *για κάθε $F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό, το $f^{-1}(F)$ ανήκει στην $\mathscr{A}$*

(δ) *για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel, το $f^{-1}(B)$ ανήκει στην $\mathscr{A}$.*

Πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων

Πρόταση

Έστω $(X,\mathscr{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και* $f,g : X \to [-\infty,\infty]$ *δύο μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(i) $[f<g]=\{x\in X : f(x)<g(x)\}\in\mathscr{A}$,

(ii) $[f\leq g]=\{x\in X : f(x)\leq g(x)\}\in\mathscr{A}$ *και*

(iii) $[f=g]=\{x\in X : f(x)=g(x)\}\in\mathscr{A}$.

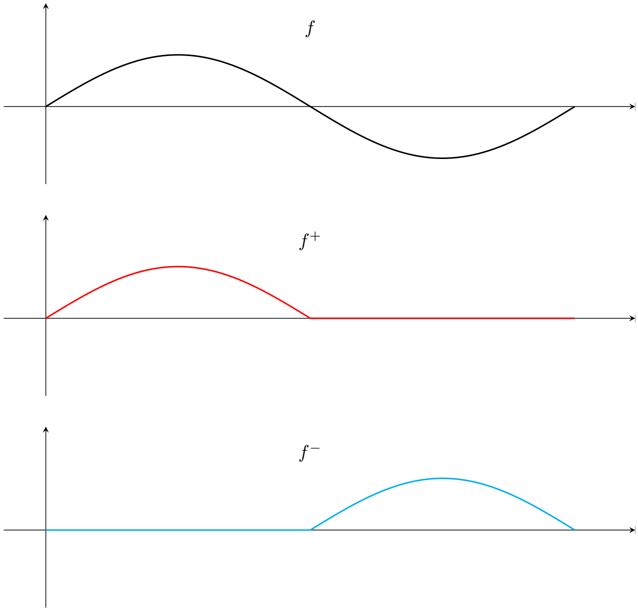
Πρόταση

Έστω $(X,\mathscr{A})$ *μετρήσιμος χώρος και* $f,g : X \to [-\infty,\infty]$ *μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

(i) *Οι συναρτήσεις* $f\vee g=\max\{f,g\}$ *και* $f\wedge g=\min\{f,g\}$ *είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Οι συναρτήσεις* $f^+=f\vee 0$, $f^-=(-f)\vee 0$ *και* $|f|=f^++f^-$ *είναι μετρήσιμες.*

Οι συναρτήσεις f^+ και f^-



Υπενθύμιση: $\limsup$, $\liminf$

Έστω (a_n) ακολουθία, $a_n \in [-\infty, \infty]$. Αν $\sup\{a_k : k \geq 1\} = +\infty$, θέτουμε $\limsup_n a_n = +\infty$. Αν όχι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$.
Παρατηρούμε ότι $b_n \geq a_n$ για κάθε n και η (b_n) είναι φθίνουσα.
Συνεπώς το $\lim b_n$ υπάρχει και ισούται με $\inf b_n$.

Ορισμός

Αν (a_n) άνω φραγμένη, $\limsup_n a_n = \lim_n b_n = \lim_n(\sup\{a_k : k \geq n\})$ *(αλλιώς,* $\limsup_n a_n = +\infty$*).*

Αν (a_n) άνω φραγμένη, $a \in \mathbb{R}$, τότε: $a = \limsup_n a_n \iff$ για κάθε $\varepsilon > 0$, το $\{k \in \mathbb{N} : a_k \geq a + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο **και** το $\{k \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.
Ομοίως,

Ορισμός

Αν (a_n) κάτω φραγμένη, $\liminf_n a_n = \lim_n(\inf\{a_k : k \geq n\})$ (αλλιώς, $\liminf_n a_n = -\infty$).

Ακολουθίες μετρησίμων συναρτήσεων

Έστω $(X, \mathscr{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ μια ακολουθία συναρτήσεων.
Η $f = \sup_n f_n$ ορίζεται κατά σημείο:
$f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \in [-\infty, \infty]$ για κάθε $x \in X$.
Ομοίως $(\limsup_n f_n)(x) = \limsup_n f_n(x)$για κάθε x.

Πρόταση

Αν κάθε f_n είναι μετρήσιμη,

(i) *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(iii) *Αν η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Παρατήρηση Η Πρόταση ΔΕΝ ισχύει για συνεχείς συναρτήσεις, ούτε για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Παραδείγματα;

Ακολουθίες μετρησίμων συναρτήσεων

Παράδειγμα

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

Διότι

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)}{\frac{1}{n}}.$$

...Όμως η f' δεν είναι αναγκαστικά συνεχής. Παράδειγμα: (ευχαριστούμε!)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \qquad \text{παραγωγίσιμη}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x}), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \qquad \text{ασυνεχής.}$$

Πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων

Έστω $(X, \mathscr{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος.

Πρόταση

Αν $f, g : X \to [0, \infty]$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε:

(i) *Η $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

(ii) *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Πρόταση

Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες και $a \in \mathbb{R}$, τότε

(i) *Οι συναρτήσεις $a \cdot f$ και $f + g$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Οι συναρτήσεις f^2 και $f \cdot g$ είναι μετρήσιμες.*

(iii) *Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, η $\frac{f}{g}$ είναι μετρήσιμη.*

Δηλαδή το σύνολο των μετρησίμων συναρτήσεων με πραγματικές τιμές είναι πραγματικός γραμμικός χώρος και δακτύλιος (με πράξεις κατά σημείο), δηλαδή άλγεβρα.

Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω $(X, \mathscr{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν το σύνολο τιμών της $s(X)$ είναι πεπερασμένο.

Κάθε απλή συνάρτηση γράφεται στην κανονική μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

όπου $s(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και $A_j = s^{-1}(\{a_j\}) \in \mathscr{A}$. Η $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ είναι διαμέριση του X.

Κάθε γραμμικός συνδυασμός $s = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ χαρακτηριστικών μετρήσιμων συνόλων είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση.

Παράδειγμα

Έστω $s = \chi_{[-1,1]} + \chi_{[0,2]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Εδώ $s(\mathbb{R}) = \{0, 1, 2\}$.
Κανονική μορφή $s = 0\chi_A + 1\chi_B + 2\chi_{[0,1]}$ όπου
$A = [-1,2]^c$, $B = [-1,0) \cup (1,2]$.

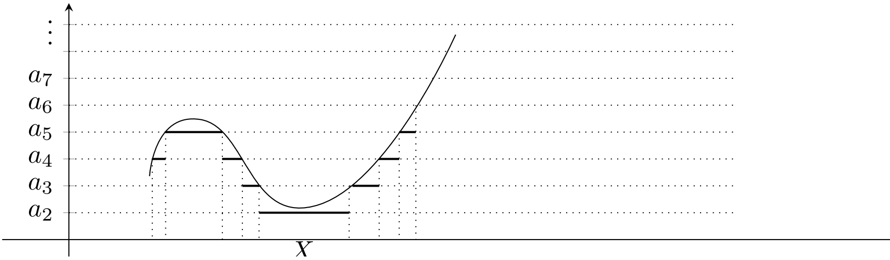
Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα

Έστω $(X, \mathscr{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη ***μη αρνητική*** *συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ ώστε*

$$s_n \nearrow f \quad (\textit{κατά σημείο}).$$

Αν η f είναι φραγμένη, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.



Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

(α) Αν f φραγμένη: $f(x) < N$ για κάθε $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίζω το $[0, N)$ σε διαστήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$:

$$[0, N) = [0, \frac{1}{2^n}) \cup [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}) \cup \ldots \cup [\frac{2^n N - 1}{2^n}, \frac{2^n N}{2^n}).$$

Θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^n N.$$

Είναι μετρήσιμα σύνολα, διαμερίζουν τον X. Ορίζω

$$s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}, \text{ αν } i = 1, 2, \ldots, 2^n N \text{ τέτοιο ώστε } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$$

δηλαδή θέτω

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n N} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}.$$

Είναι απλή μετρήσιμη και προφανώς $0 \leq s_n \leq f$.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

Ισχυρισμός. $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τότε *για κάθε* n υπάρχει k ώστε $x \in E_{n,k}$, δηλ. $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$ ενώ $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, οπότε

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n$$

δηλ. $\sup\limits_{x \in X} |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ άρα $s_n \to f$ ομοιόμορφα.

(β) Αν η f δεν είναι φραγμένη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίζω το $[0, +\infty] = [0, n) \cup [n, +\infty]$ και

$$[0, n) = [0, \frac{1}{2^n}) \cup [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}) \cup \ldots \cup [\frac{n2^n - 1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n}).$$

Θέτω: $F_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$

$$E_{n,i} = \left\{x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

Είναι μετρήσιμα σύνολα, διαμερίζουν τον X.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

Ορίζω

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } f(x) \geq n \\ \frac{i-1}{2^n}, & \text{αν } \exists i = 1, 2, \ldots, n2^n \text{ ώστε } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \end{cases}$$

δηλαδή θέτω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Είναι απλή μετρήσιμη και προφανώς $0 \leq s_n \leq f$.

Ισχυρισμός. $s_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Αν $f(x) < +\infty$, υπάρχει $n_0 = n_0(x)$ ώστε $f(x) < n_0 \leq n$ όταν $n \geq n_0$ οπότε υπάρχει k ώστε $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$ ενώ $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, άρα

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq n_0$$

άρα $s_n(x) \to f(x)$. Αν πάλι $f(x) = +\infty$, τότε $f(x) \geq n$ για καθε n, άρα $s_n(x) = n \to +\infty = f(x)$.

(γ) Ισχυρισμός. Η (s_n) είναι αύξουσα.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, να δείξω ότι $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

• Αν $f(x) \geq n+1$ τότε $s_{n+1}(x) = n+1$, αλλά $f(x) > n$ άρα $s_n(x) = n$ άρα $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

• Αν $n+1 > f(x) \geq n$ τότε $\exists k : f(x) \in [\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}})$, αλλά $\frac{k}{2^{n+1}} \geq n$ (γιατί;) οπότε $s_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \geq n$ ενώ $s_n(x) = n$ αφού $f(x) \geq n$.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

- Αν $f(x) < n$ τότε υπάρχει k ώστε $\frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}$.

Τώρα $s_n(x) = \frac{k}{2^n}$ και

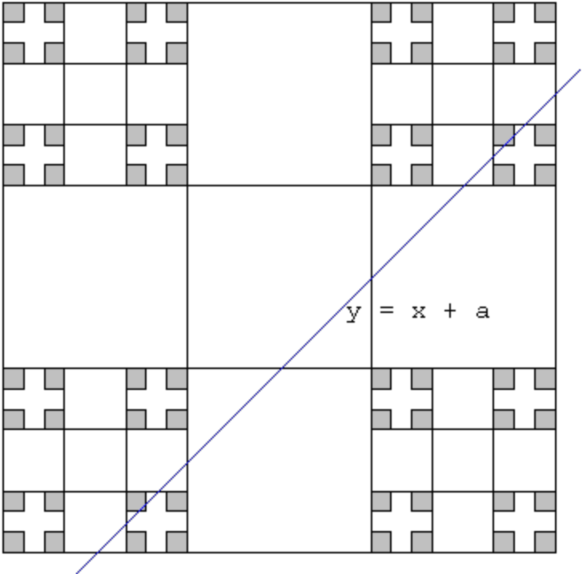
$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right).$$

Δύο περιπτώσεις:

$$f(x) \in \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow s_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = s_n(x)$$
$$f(x) \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow s_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > s_n(x)$$

Και στις δύο περιπτώσεις, $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$. $\square$

Για κάθε $a \in [-1,1]$ υπάρχουν $x, y \in C$ με $y - x = a$



Προσέγγιση με απλές

Πόρισμα

Έστω $(X, \mathscr{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία* $(s_n)_n$ *απλών συναρτήσεων με*

$$\begin{aligned} & s_n \to f \\ \text{και} \quad & 0 \le |s_1| \le |s_2| \le \cdots \le |f|. \end{aligned}$$

Αν επιπλέον η f *είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

(Απόδειξη: Αργότερα)

Μετρήσιμο που δεν είναι Borel

Πρόταση

Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.

Θεωρούμε την $\phi : [0,1] \to [0,1]$ με $\phi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + x)$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue.
Είναι ομοιομορφισμός.
Το σύνολο $\phi(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(\phi(C)) = \frac{1}{2}$.
Άρα υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $\phi(C)$. Τότε, το $K = \phi^{-1}(M) \in \mathscr{M}_{\lambda^*}$ διότι $K \subseteq C$.
Αν $K \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, τότε $M = (\phi^{-1})^{-1}(K) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ άτοπο.
(Λεπτομέρειες: Αργότερα)

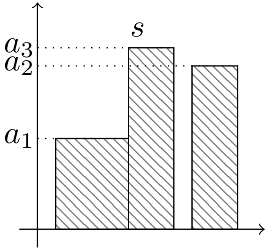
Το ολοκλήρωμα Lebesgue: Ορισμοί

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

(α) Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ είναι απλή μετρήσιμη και $s(X) = \{a_1, \dots, a_n\}$ ορίζουμε

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \in [0, +\infty]$$

όπου $A_k = s^{-1}(\{a_k\})$ (θέτουμε $0 \cdot (+\infty) = 0$).



Σχήμα : Ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης

(β) Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, ορίζουμε

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \text{ απλή μετρήσιμη, } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Αν $A \in \mathscr{A}$ ορίζουμε

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

(γ) Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη και $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$. Τότε οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f^+ d\mu$ και $\int f^- d\mu$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(δ) Μια $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μετρήσιμη και

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue για απλές $f \geq 0$

Πρόταση

Αν $s_1, s_2 : X \to [0, +\infty)$ απλές μετρήσιμες και $a \geq 0$, τότε

(i) $\displaystyle\int a s_1 d\mu = a \int s_1 d\mu$ *(θετικά ομογενές)*

(ii) $\displaystyle\int (s_1 + s_2) d\mu = \int s_1 d\mu + \int s_2 d\mu$ *(προσθετικό)*

(iii) *Αν* $s_1 \leq s_2$ *τότε* $\displaystyle\int s_1 d\mu \leq \int s_2 d\mu$ *(μονότονο).*

Για το (ιι), χρειάζεται το (προσωρινό) λήμμα:
Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ απλή μετρήσιμη και $s = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$ όπου (απλώς) $B_k \cap B_j = \emptyset$ για $k \neq j$, τότε

$$\int s d\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu(B_k).$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue για μετρήσιμες $f \geq 0$

Πρόταση

Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ *μετρήσιμες και* $a \geq 0$, *τότε*

(i) $\displaystyle\int afd\mu = a\int fd\mu.$

(ii) *Αν* $f \leq g$ *τότε* $\displaystyle\int fd\mu \leq \int gd\mu.$

(iii) *Αν* $A \subseteq B$ $(A, B \in \mathscr{A})$ *τότε* $\displaystyle\int_A fd\mu \leq \int_B fd\mu$

(iv) *Αν* $A \in \mathscr{A}$ *και* $\mu(A) = 0$ *ή* $f|_A = 0$ *τότε* $\displaystyle\int_A fd\mu = 0.$

Επίσης ισχύει η

$$\int fd\mu + \int gd\mu \leq \int (f+g)d\mu\,.$$

Ισότητα;;

Πότε ισχύει $\int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu$;;

Παραδείγματα (α) Στο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$: Έστω $f_n := \chi_{[n,n+1]}$. Έχω $f_n \to f = 0$ κ.σ., αλλά $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Η μάζα στις f_n «φεύγει προς το άπειρο οριζόντια».)

(β) Στο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$: Έστω $f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Τώρα $f_n \to f = 0$ ομοιόμορφα αλλά $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Εδώ η μάζα «απλώνεται» σ' όλο το πλάτος του $\mathbb{R}$.)

(γ) Στο $([0,1], \mathscr{B}, \lambda)$: Έστω $f_n := n\chi[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$. Το μέτρο είναι πεπερασμένο, και $f_n \to f = 0$ κατά σημείο, όχι ομοιόμορφα. Πάλι $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Εδώ η μάζα «φεύγει προς το άπειρο κατακόρυφα».)

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f = \lim_n f_n$, τότε

$$\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu \quad \text{για } n \to \infty.$$

Χρησιμοποιείται το (προσωρινό) λήμμα: Έστω $s : X \to [0, \infty]$ μια απλή μη αρνητική συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $\nu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \int_A s \, d\mu,$$

για $A \in \mathscr{A}$ είναι ένα μέτρο[1] στο χώρο $(X, \mathscr{A})$.

[1] Η ν λέγεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της s ως προς μ.

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

Συμπέρασμα Αν $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, τότε

$$\int f d\mu = \lim \int s_n d\mu$$

όπου (s_n) αύξουσα ακολουθία απλών $s_n \geq 0$ με $s_n \nearrow f$.

Ερωτήσεις: (α) Ισχύει το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για το ολοκλήρωμα Riemann; Υπό προϋποθέσεις;

(β) Ισχύει για φθίνουσες ακολουθίες; Υπό προϋποθέσεις;

Συνέπειες Θ. Μονότονης Σύγκλισης

Πρόταση (Προσθετικότητα)

Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ *μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Θεώρημα (Beppo Levi)

Αν (f_n) *μετρήσιμες,* $f_n : X \to [0, +\infty]$, *τότε*

$$\int \left(\sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \left(\int f_n d\mu \right).$$

Πρόταση (Λήμμα Fatou)

Αν $f_n : X \to [0, +\infty]$ *είναι μετρήσιμες, τότε*

$$\int (\liminf_n f_n) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\nu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathscr{A}.$$

Η ν λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ.

Πρόταση

(i) *Το ν είναι μέτρο.*

(ii) *Αν $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$*

(iii) *Αν $g : X \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $\int g \, d\nu = \int g f \, d\mu$.*

Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Ορισμός

Μια ιδιότητα P σημείων του X ισχύει μ-σχεδόν παντού αν το σύνολο $\{x \in X : \text{η } P(x) \text{ δεν ισχύει}\}$ είναι μ-μηδενικό, δηλ. υπάρχει $A \in \mathscr{A}$ με $\mu(A) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in X \setminus A$, η $P(x)$ να ισχύει.

Πρόταση

Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ είναι μ-μετρήσιμη (δηλ. $[f \leq b] \in \mathscr{A}_\mu$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$) τότε:

(α) *Κάθε g που είναι μ-σχεδόν παντού ίση με την f είναι μ-μετρήσιμη. (:το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο).*

(β) *Υπάρχει $h : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη (δηλ. $[h \leq b] \in \mathscr{A}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$) ώστε $h = f$ σχεδόν παντού.*

Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Πόρισμα

Κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[-\infty,+\infty]$ είναι λ-σχεδόν παντού ίση με μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος μέτρου.

Πρόταση (Ανισότητα Chebyshev-Markov)

Έστω $f:X\to[0,\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $t>0$,

$$\mu\left(\{x\in X : f(x)\geq t\}\right)\leq\frac{1}{t}\int f\,d\mu.$$

Πρόταση

Αν $f:X\to[0,+\infty]$ είναι μετρήσιμη τότε

(α) $\int f d\mu<\infty \implies f(x)<\infty$ *σχεδόν για κάθε* x.

(β) $f=0$ *σχεδόν παντού* $\iff \int f d\mu=0$.

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Υπενθύμιση ορισμών:

- Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη και $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$. Τότε οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f^+ d\mu$ και $\int f^- d\mu$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- Μια $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μετρήσιμη και $\displaystyle\int |f| d\mu < +\infty$.

Γράφουμε

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathscr{A}, \mu) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ ολοκληρώσιμη}\}$$

Παρατήρηση $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \Leftrightarrow f^{\pm} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και τότε
$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}$.

Κάθε Riemann ολοκληρώσιμη είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με: $P_n\subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\|\to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n)\to\int_a^b f(x)\;dx\;,\;\;U(f,P_n)\to\int_a^b f(x)\;dx.$$

Έστω g_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\displaystyle\int_a^b g_n(x)\;dx=L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $\displaystyle L(f,P_n)=\sum_{i=0}^{k-1}m_i(x_{i+1}-x_i)$ θέτω $\displaystyle g_n=\sum_{i=0}^{k-1}m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\displaystyle\int_a^b u_n(x)\;dx=U(f,P_n)$. Τότε, $g_n\le f\le u_n$. Η (g_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε $\exists g:=\lim_n g_n$ και $u:=\lim_n u_n$ και $g\le f\le u$. Είναι όρια μονότονων ακολουθιών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Άρα [2]

$$\int_a^b u \, d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n \, d\lambda \overset{(!)}{=} \lim_n \int_a^b u_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

και

$$\int_a^b g \, d\lambda = \lim_n \int_a^b g_n \, d\lambda \overset{(!)}{=} \lim_n \int_a^b g_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Άρα $g = u$ σχεδόν παντού. Αφού $g \leq f \leq u$, προκύπτει ότι $g = f = u$ σχεδόν παντού.
Οπότε, $f = \lim g_n$ σχεδόν παντού, άρα η f είναι μετρήσιμη και

$$\int_a^b f \, d\lambda = \lim_n \int_a^b g_n \, d\lambda = \int_a^b g \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

[2] Αφού u_n κλιμακωτή, $\int_a^b u_n d\lambda \overset{(!)}{=} \int_a^b u_n(x) dx$.

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα

Ο $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *είναι γραμμικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμική απεικόνιση* $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$. *Δηλαδή αν* $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$f + \lambda g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \quad \text{και} \quad \int (f + \lambda g) d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu.$$

Πρόταση

Αν $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *τότε*

$$(i) \qquad f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

$$(ii) \qquad \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Έστω $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

(ι) *Αν* $f = g$ μ-*σ.π.* *τότε* $\int f d\mu = \int g d\mu$.

(ιι) $f = 0$ μ-*σ.π.* *αν και μόνον αν* $\int_A f d\mu = 0$ *για κάθε* $A \in \mathscr{A}$.

Πόρισμα

Αν $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *και* $f \leq g$ μ-*σ.π.* *τότε* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω (f_n) *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει για κάθε* $x \in X$ *και έστω* $f(x) = \lim_n f_n(x)$.
Αν υπάρχει $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ *ώστε* $|f_n| \leq g$ *για κάθε* n, *τότε*

$$\begin{aligned} & f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \\ \textit{και} \quad & \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \\ \textit{και} \quad & \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu . \end{aligned}$$

Δες και τα αντιπαραδείγματα: [;;] όταν δεν υπάρχει «κυριαρχούσα» $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης: Απόδειξη σύγκλισης

Θέτουμε $h_n = |f_n - f|$ και παρατηρούμε ότι $0 \leq h_n \leq 2g$ και ότι $h_n(x) \to 0$ για κάθε x. Άρα $2g - h_n \geq 0$ και $2g - h_n \to 2g$ κατά σημείο. Από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf_n (2g - h_n) d\mu \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\int 2g d\mu &= \int \liminf_n (2g - h_n) d\mu \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\mu \\ &= \int 2g d\mu + \liminf_n \int (-h_n) d\mu = \int 2g d\mu - \limsup_n \int h_n d\mu\end{aligned}$$

άρα $\limsup_n \int h_n d\mu \leq 0$. Αλλά $0 \leq \int h_n d\mu$ άρα $0 \leq \liminf_n \int h_n d\mu$.
Επομένως το όριο $\lim_n \int h_n d\mu$ υπάρχει και είναι 0. $\square$

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Πόρισμα (Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης)

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου,* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* $f : X \to \mathbb{C}$ *ώστε* $f_n \to f$ μ*-σ.π. Υποθέτουμε ότι επιπλέον υπάρχει* $M > 0$ *ώστε* $|f_n| \leq M$ μ*-σ.π. στο* X*. Τότε οι* f_n *και η* f *είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:*

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Από αυτή τη σύγκλιση έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.

• $f_n \to f$ κατά σημείο στο X σημαίνει ότι $\forall \varepsilon > 0$ και $\forall x \in X \ \exists n_o = n_o(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_o \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

• $f_n \to f$ (κατά σημείο) μ-σχεδόν παντού σημαίνει ότι υπάρχει $N \in \mathscr{A}$ με $\mu(N) = 0$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X \setminus N$.

Παρατηρήσεις $(f_n, f, g_n, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.)

(i) Αν $f_n \to f$ μ-σ.π. και $f_n \to g$ μ-σ.π., τότε $f = g$ μ-σ.π.

(ii) Αν $f_n \to f$ μ-σ.π. και $g_n \to g$ μ-σ.π., τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $af_n + bg_n \to af + bg$ κατά σημείο μ-σ.π.

(iii) και $f_n g_n \to fg$ κατά σημείο $\mu-$σ.π.

Ορισμός

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.

(i) *Η $\{f_n\}$ **συγκλίνει στην f κατά μέσο ή στον L^1** αν*

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

(ii) *Η $\{f_n\}$ **είναι βασική ή Cauchy κατά μέσο** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$ να ισχύει*

$$\int |f_n - f_m| \, d\mu < \varepsilon.$$

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f, g_n, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.

Παρατηρήσεις

(i) Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και $f_n \to g$ κατά μέσο, τότε $f = g$ μ-σ.π.

(ii) Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και $g_n \to g$ κατά μέσο, τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $af_n + bg_n \to af + bg$ κατά μέσο.

- Είναι σωστό ότι τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο;;

Θεώρημα (F. Riesz)

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.

- *Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ κατά μέσο*
- *Επιπλέον υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ με $f_{n_k} \to f$ μ-σ.π.*

Πόρισμα

Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ μ-σ.π.

Παραδείγματα

- $g_n = n\chi_{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})}$: σχεδόν παντού, όχι κατά μέσο.
- $f_1 = \chi_{(0,1)}$, $f_2 = \chi_{(0,\frac{1}{2})}$, $f_3 = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, $f_4 = \chi_{(0,\frac{1}{4})}$, $f_5 = \chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$, $f_6 = \chi_{(\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$, $f_7 = \chi_{(\frac{3}{4},1)}$, $f_8 = \chi_{(0,\frac{1}{8})}, \dots$: κατά μέσο, όχι λ-σ.π.

Πρόταση

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(i) *Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ μ-σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $|f| \leq M$ μ-σ.π.*

(ii) *Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, $g_n \to g$ κατά μέσο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ μ-σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο.*

Παράδειγμα

Στον $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, έστω $f_n = g_n = \sqrt{n}\chi_{(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})}$:
Έχουμε $f_n \to 0$ κατά μέσο, $g_n \to 0$ κατά μέσο, αλλά $\int |f_n g_n - 0| d\lambda = 1$ για κάθε n.

Ο χώρος $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu)$

Ορισμός

Αν $(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, ο χώρος $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|d\mu < +\infty$. Ο αριθμός $\int_X |f|d\mu$ συμβολίζεται $\|f\|_1$.

Παρατηρήσεις (ι) Αν η $f : X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ είναι μετρήσιμη τότε $\|f\|_1 < +\infty$ αν και μόνον αν η f παίρνει μ-σ.π. πραγματικές τιμές.
(ιι) Αν $f,g \in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $f+\lambda g \in \mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu)$ και

1. $\|\lambda g\|_1 = |\lambda|\|g\|_1$
2. $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
3. $\|f\|_1 = 0$ αν και μόνον αν $f=0$ μ-σ.π.

Ο χώρος $(L^1(X,\mathscr{S},\mu),\|\cdot\|_1)$

Ο $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_1$ είναι *ημινόρμα* σ'αυτόν.
Θέτω $\mathscr{N}=\{f\in\mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu):\|f\|_1=0\}$.
Αν $f,g\in\mathscr{L}^1$, έχω $f=g$ μ-σ.π. $\iff$ $f-g\in\mathscr{N}$.
Επίσης, ο $\mathscr{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{L}^1$.
Θέτω $\|f+\mathscr{N}\|_1:=\|f\|_1$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^1(X,\mathscr{S},\mu)=\mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu)/\mathscr{N}$.
Έπεται ότι ο $L^1(X,\mathscr{S},\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathscr{L}^1(X,\mathscr{S},\mu)$ modulo ισότητα μ-σ.π.
Το Θεώρημα Riesz-Fischer λέει ακριβώς ότι ο χώρος $(L^1(X,\mathscr{S},\mu),\|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach.

Ορισμός

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *ένας χώρος μέτρου,* $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις.*
Η $\{f_n\}$ *συγκλίνει στην* f *κατά μέτρο (ή κατά πιθανότητα), αν για κάθε* $\varepsilon > 0$,

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) \longrightarrow 0 \quad \textit{καθώς } n \to \infty.$$

$f_n \to f$ κατά μέτρο σημαίνει ότι $\forall \varepsilon > 0$, αν

$$N(n,\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

τότε $\lim_n \mu(N(n,\varepsilon)) = 0$.

$$N(n,\varepsilon)=\{x\in X:|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}$$

Παρατήρηση

Αν $X\setminus A=\{x\in X:\lim_n f_n(x)=f(x)\}$ *τότε*

$$A=\bigcup_{\varepsilon>0}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}N(n,\varepsilon)\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}N(n,\frac{1}{k})\right).$$

Άρα $A\in\mathscr{A}$. *Έχουμε* $f_n\to f$ *κατά σημείο αν και μόνον αν* $A=\emptyset$ *και* $f_n\to f$ μ*-σχεδόν παντού αν και μόνον αν* $\mu(A)=0$.

Απόδειξη Παρατήρησης

$$
\begin{aligned}
f_n(x) \to f(x) \quad & \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : (n \geq m \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : (n \geq m \Rightarrow x \in (N(n,\varepsilon))^c) \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} (N(n,\varepsilon))^c \\
& \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (N(n,\varepsilon))^c \\
& \Longleftrightarrow \qquad\qquad x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (N(n,\varepsilon))^c \right)
\end{aligned}
$$

Πρόταση (Lebesgue)

Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού , τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Παραδείγματα

• Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. π.χ. Στον $([0,1], \mathscr{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ $f_1 = \chi_{(0,1)}$, $f_2 = \chi_{(0,\frac{1}{2})}$, $f_3 = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, $f_4 = \chi_{(0,\frac{1}{4})}$, $f_5 = \chi_{(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$, $f_6 = \chi_{(\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$, $f_7 = \chi_{(\frac{3}{4},1)}$,$f_8 = \chi_{(0,\frac{1}{8})}, \dots$: κατά μέτρο, όχι λ-σ.π.

• Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα σε χώρους άπειρου μέτρου: π.χ. Στον $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{\lambda^*}, \lambda)$, η ακολουθία $(\chi_{[n,\infty)})$ τείνει στο 0 κατά σημείο, ενώ δεν συγκλίνει κατά μέτρο.

Πρόταση

Αν $f_n \to f$ *κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία* (f_{k_n}) *της* (f_n) *ώστε* $f_n \to f$ *σχεδόν παντού.*

Πόρισμα

Αν $f_n \to f$ *κατά μέτρο και* $f_n \to g$ *κατά μέτρο, τότε* $f = g$ μ*-σ.π.*

Ορισμός

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, λέμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_\varepsilon \in \mathscr{A}$ με $\mu(M_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus M_\varepsilon$.

Παράδειγμα

Στον $([0,1], \mathscr{M}_{\lambda^*}, \lambda)$, $f_n = \chi_{(0,\frac{1}{n})}$ τείνει στην 0 παντού, αλλά όχι ομοιόμορφα, ούτε ομοιόμορφα έξω από ένα M με $\mu(M) = 0$, αλλά για κάθε $\varepsilon > 0$, έξω απ' το $M_\varepsilon = [0, \varepsilon]$.

Θεώρημα (Egorov)

Έστω $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Απόδειξη Egorov

Επειδή $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού, για κάθε $\varepsilon = \frac{1}{k}$ έχω:

$$\lim_m \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Επομένως για κάθε $\delta > 0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right) < \frac{\delta}{2^k}.$$

Έστω

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right).$$

Τότε

$$\mu(A_\delta) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m_k}^{\infty} N(n, \frac{1}{k})\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Ισχυρισμός: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c.
Απόδειξη: Στην τάξη...

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων: Ανακεφαλαίωση

Σχεδόν παντού: Μοναδ. ορίου (σ.π.). αθροίσματα, γινόμενα.

Στον L^1: Μοναδ. ορίου (σ.π.). αθρ., γιν. ομ. φργ., γινόμενα όχι.

Στον L^1: Βασική $\Rightarrow$ συγκλίνει. (Riesz)

Συγκλίνει σ.π. $\not\Rightarrow$ συγκλίνει στον L^1

Συγκλίνει στον L^1 $\not\Rightarrow$ συγκλίνει σ.π.

Συγκλίνει στον $L^1 \Rightarrow \exists$ υπακολουθία που συγκλίνει σ.π.

Κατά μέτρο: Συγκλίνει σ.π. $\not\Rightarrow$ συγκλίνει κ.μ.

Συγκλίνει σ.π. $+\mu(X) < \infty \Rightarrow$ συγκλίνει κ.μ. (Lebesgue)

Συγκλίνει κ.μ. $\not\Rightarrow$ συγκλίνει σ.π.

Συγκλίνει κ.μ. $\Rightarrow \exists$ υπακολουθία που συγκλίνει σ.π.

Άρα: Μοναδ. ορίου (σ.π.)

Σχεδόν ομοιόμορφη: Συγκλίνει σ.π. $\not\Rightarrow$ συγκλίνει σχ. ομ.

Συγκλίνει σ.π. $+\mu(X) < \infty \Rightarrow$ συγκλίνει σχ. ομ. (Egorov)

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων: Συνέχεια

Συγκλίνει σχ. ομ. $\Rightarrow$ σ.π. και κατά μέτρο.

Συγκλίνει σ.π. και κατά μέτρο $\nRightarrow$ σχ. ομ.

Συγκλίνει στον $L^1 \Rightarrow$ συγκλίνει κατά μέτρο.

Συγκλίνει κατά μέτρο $\nRightarrow$ συγκλίνει στον L^1

Συγκλίνει κ.μ. $+$ κυριαρχ. από μια L^1 $\Rightarrow$ συγκλίνει στον L^1

Πιό συγκεκριμένα: $\rightsquigarrow$

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.

Πρόταση

Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ σχεδόν παντού και κατά μέτρο.

Το αντίστροφο δεν ισχύει κατ΄ ανάγκην:

Παράδειγμα

Στον $(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{\lambda^*}, \lambda)$, η $f_n = \chi_{[n, n+\frac{1}{n})}$ τείνει στην 0 σχεδόν παντού και κατά μέτρο, αλλά όχι σχεδόν ομομοιόμορφα.

Πρόταση

Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Το αντίστροφο δεν ισχύει κατ' ανάγκην:

Παράδειγμα

Στον $([0,1],\mathscr{M}_{\lambda^*},\lambda)$, η $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$ τείνει στην 0 κατά μέτρο, αλλά όχι κατά μέσο.

Αν όμως υπάρχει «κυριαρχούσα» ολοκληρώσιμη συνάρτηση:

Πρόταση

Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ με $|f_n| \leq g$ για κάθε n, τότε $f_n \to f$ κατά μέσο.

Προσέγγιση από «καλές» συναρτήσεις

Πρόταση

Για κάθε $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ *υπάρχει ακολουθία* (f_n) *απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ώστε* $f_n \to f$ *κατά μέσο, δηλ.* $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Παρατήρηση Στον $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^k, \lambda)$, μπορώ να υποθέσω f_n κλιμακωτές.

Λήμμα

Έστω $(X, \mathscr{A})$ *ένας μετρήσιμος χώρος και* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία* $(s_n)_n$ *απλών συναρτήσεων με*

$$s_n \to f \qquad \text{και} \qquad 0 \leq |s_1| \leq |s_2| \leq \cdots \leq |f|.$$

Αν επιπλέον η f *είναι φραγμένη, τότε* $s_n \to f$ *ομοιόμορφα.*

Πρόταση

Αν μ είναι κανονικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$, οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνό υποσύνολο[3] του $L^1(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^k}, \mu)$: για κάθε $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^k, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^k}, \mu)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση g με συμπαγή φορέα ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

Παρατήρηση Μπορώ επίσης να βρώ h κλιμακωτή ώστε $\|f - h\|_1 < \varepsilon$.

[3] Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κανονικά μέτρα Borel σε τοπικά συμπαγείς χώρους Hausdorff.

Προσέγγιση από «καλές» συναρτήσεις

«Κάθε μετρήσιμη ισούται με μια συνεχή έξω από ένα σύνολο μικρού μέτρου.»

Θεώρημα (Lusin)

Έστω X μετρικός χώρος και μ πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel στον X. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μ-μετρήσιμη, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq X$ με $\mu(F_\varepsilon^c) < \varepsilon$ ώστε η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής στο F_ε.

Πρόταση

(Ίδιες υποθέσεις:) Επίσης, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ ώστε $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$. Επιπλέον

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Προσέγγιση από «καλές» συναρτήσεις

Παρατήρηση Αρκεί το μ να είναι μέτρο Borel που ικανοποιεί:
για κάθε $B \in \mathscr{B}(X)_\mu$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν F κλειστό και G ανοικτό με $F \subseteq B \subseteq G$ και $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.
Η συνθήκη αυτή ισχύει, π.χ.

- Για το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$.
- Για κάθε πεπερασμένο μέτρο Borel σε μετρικό χώρο.

Απόδειξη της Πρότασης Επεκτείνουμε την $f|_{F_\varepsilon}$ στον X χρησιμοποιώντας το

Λήμμα (Θεώρημα Tietze για μετρικούς χώρους)

Αν X είναι μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$ κλειστό, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : Y \to \mathbb{R}$ έχει μια συνεχή επέκταση $g : X \to \mathbb{R}$ και επιπλέον

$$\sup\{|g(x)| : x \in X\} = \sup\{|f(y)| : x \in Y\}.$$

Στην περίπτωση $X = \mathbb{R}$, γράφουμε $Y^c = \bigcup (a_n, b_n)$ και επεκτείνουμε «γραμμικά» σε κάθε (a_n, b_n).

Μέτρα γινόμενο, Θεώρημα Fubini

Δύο χώροι μέτρου $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$: να ορίσουμε χώρο μέτρου $(X \times Y, \mathscr{C}, \rho)$ ώστε

1. Η $\mathscr{C}$ να περιέχει όλα τα *μετρήσιμα ορθογώνια* $A \times B$ με $A \in \mathscr{A}$ και $B \in \mathscr{B}$.
2. $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$: *μέτρο γινόμενο*.
3. Αν $f \geq 0$ ή $f \in \mathscr{L}^1(X \times Y, \rho)$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\rho(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Μέτρο γινόμενο

Δύο χώροι μέτρου $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$.

Ορισμός

Η σ-άλγεβρα γινόμενο: $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$.

Παράδειγμα

Ισχύει $\mathscr{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^m) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^{k+m})$ αλλά
$\mathscr{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathscr{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathscr{M}_{\lambda^*}(\mathbb{R}^{k+m})$.

Θα δείξουμε

Θεώρημα

Αν τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα, τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο ρ στο χώρο $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ ώστε

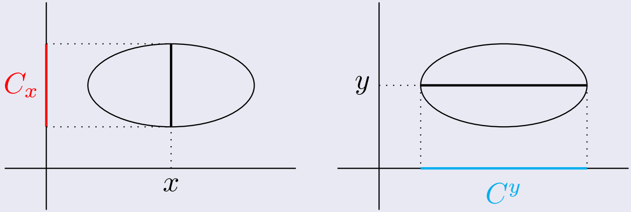
$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{A} \text{ και } B \in \mathscr{B}.$$

Μέτρο γινόμενο

Ορισμός

Έστω $C \subseteq X \times Y$. *Οι* ***τομές*** *του* C *στα* $x \in X$ *και* $y \in Y$ *αντίστοιχα είναι οι*

$$C_x = \{y \in Y : (x,y) \in C\} \text{ και } C^y = \{x \in X : (x,y) \in C\}.$$



Αν επιπλέον $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση, τότε ορίζονται* $f_x : Y \to \mathbb{R}$ *και* $f^y : X \to \mathbb{R}$ *με*

$$f_x(y) = f(x,y) \text{ και } f^y(x) = f(x,y).$$

Μέτρο γινόμενο

Έστω $(X, \mathscr{A})$ και $(Y, \mathscr{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι.

Πρόταση

Αν $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, τότε $C_x \in \mathscr{B}$ και $C^y \in \mathscr{A}$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.

Απόδειξη Η οικογένεια

$$\mathscr{C} = \{C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} : C_x \in \mathscr{B}, \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

είναι η $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Ομοίως για τα C^y.

Πρόταση

Αν η f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στο $X \times Y$, τότε η f_x είναι $\mathscr{B}$-μετρήσιμη για κάθε $x \in X$ και η f^y είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη για κάθε $y \in Y$.

Θεώρημα Fubini για χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για $C \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_C : X \to [0, \infty]$ και $\psi_C : Y \to [0, \infty]$ που ορίζονται ως

$$\phi_C(x) = \nu(C_x) = \int_Y \chi_{C_x}(y)\ d\nu(y) = \int_Y \chi_C(x,y)\ d\nu(y)$$

και

$$\psi_C(y) = \mu(C^y) = \int_X \chi_{C^y}(x)\ d\mu(x) = \int_X \chi_C(x,y)\ d\mu(x).$$

Τότε η ϕ_C είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη, η ψ_C $\mathscr{B}$-μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_C\ d\mu = \int_Y \psi_C\ d\nu,$$

δηλαδή

$$\int_X \left(\int_Y \chi_C(x,y)\ d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_C(x,y)\ d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Μέτρο γινόμενο

Θεώρημα (Fubini για χαρακτηριστικές συναρτήσεις)

Αν $(X,\mathscr{A},\mu)$ και $(Y,\mathscr{B},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $C\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ τότε οι $x\to\nu(C_x)$ και $y\to\mu(C^y)$ είναι μετρήσιμες και ισχύει

$$\int_X \nu(C_x)\,d\mu(x)=\int_Y \mu(C^y)\,d\nu(y).$$

Παράδειγμα

Όμως αν $\mu(A)=\lambda(A)$ και $\nu(A)=|A|$ (απαριθμ.) στα Borel του $[0,1]$ τότε για κάθε x,y έχω $\nu(C_x)=1$ ενώ $\mu(C^y)=0$.

Θεώρημα (Μέτρο γινόμενο: Ύπαρξη και μοναδικότητα)

Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ και $(Y,\mathscr{B},\nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Η απεικόνιση

$$\rho:\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\to[0,+\infty]\quad C\to\int_X \nu(C_x)\,d\mu(x)=\int_Y \mu(C^y)\,d\nu(y)$$

ορίζει μοναδικό μέτρο με $\rho(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$, $(A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{B})$.

Θεώρημα Tonelli (Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις)

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν $f : X \times Y \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση, θεωρώ τις συναρτήσεις

$$\phi_f(x) = \int_Y f(x,y)\ d\nu(y) \quad \text{και} \quad \psi_f(y) = \int_X f(x,y)\ d\mu(x).$$

Τότε η ϕ_f είναι $\mathscr{A}$-μετρήσιμη, η ψ_f $\mathscr{B}$-μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_f\ d\mu = \int_Y \psi_f\ d\nu = \int_{X \times Y} f\ d(\mu \times \nu)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f\ d(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Θεώρημα Tonelli

Πόρισμα

Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ *και* $(Y,\mathscr{B},\nu)$ *δυο χώροι* σ*-πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση* $f: X\times Y\to\mathbb{C}$*. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η* f *είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή* $f\in\mathscr{L}^1(\mu\times\nu)$.

(ii) *Ισχύει* $\displaystyle\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|\,d\nu(y)\right)d\mu(x)<\infty.$

(iii) *Ισχύει* $\displaystyle\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|\,d\mu(x)\right)d\nu(y)<\infty.$

Θεώρημα Fubini

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mu \times \nu)$. Τότε:

(i) Ισχύει $f_x \in \mathscr{L}^1(\nu)$, μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ και $f^y \in \mathscr{L}^1(\mu)$, ν-σχεδόν για κάθε $y \in Y$.

(ii) Οι συναρτήσεις $\phi_f : X \to \mathbb{C}$ και $\psi_f : Y \to \mathbb{C}$ που ορίζονται ως

$$\phi_f(x) = \begin{cases} \int_Y f_x(y)\, d\nu(y), & \text{αν } f_x \in \mathscr{L}^1(\nu) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$\psi_f(y) = \begin{cases} \int_X f^y(x)\, d\mu(x), & \text{αν } f^y \in \mathscr{L}^1(\mu) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ανήκουν στους $\mathscr{L}^1(\mu)$ και $\mathscr{L}^1(\nu)$ αντίστοιχα και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_f \, d\mu = \int_Y \psi_f \, d\nu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu).$$

Θεώρημα Fubini

Θεώρημα

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ *δύο χώροι* σ*-πεπερασμένου μέτρου και μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση* $f \in \mathscr{L}^1(\mu \times \nu)$*. Τότε:*

(i) *Ισχύει* $f_x \in \mathscr{L}^1(\nu)$*,* μ*-σχεδόν για κάθε* $x \in X$ *και* $f^y \in \mathscr{L}^1(\mu)$*,* ν*-σχεδόν για κάθε* $y \in Y$*.*

(ii) *Έχουμε*

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$