Θεωρία Μέτρου (511)

Εξετάσεις 19 Ιανουαρίου 2016

1. (α) (1μ) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$. Θέτουμε

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Να αποδειχθεί ότι το μ είναι μέτρο.

(β) (1μ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι υποσύνολο Borel του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι υποσύνολο Borel του $\mathbb{R}$.

2. (α) (1,5μ) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A_n \in \mathcal{A}$. Αν $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ δείξτε ότι $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$ και δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο η ανισότητα να είναι γνήσια.

(β) (1,5μ) Να ορισθεί το εξωτερικό μέτρο Lebesgue $\lambda^*(A)$ ενός υποσυνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ και να δειχθεί ότι $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) : U$ ανοικτό, $U \supset A\}$ (όπου λ το μέτρο Lebesgue).

3. (2μ) Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (f_n) ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων με $f_n : X \to [0, +\infty)$. Εξετάστε αν αληθεύει κάθε μία από τις ακόλουθες σχέσεις (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα):

$$(i) \qquad \lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu, \qquad (ii) \qquad \sum_n \int f_n d\mu = \int \sum_n f_n d\mu.$$

4. (2μ) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι $f(x) < +\infty$ σχεδόν για καθε $x \in X$.
(β) Θέτουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) < n \\ n & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο.

5. (2μ) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \delta$, τότε $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$.

6. (2μ) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου. Να ορίσετε την σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και το μέτρο γινόμενο $\mu \times \nu$.

Αν $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ με $(\mu \times \nu)(C) = 0$, να δείξετε ότι μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\nu(C_x) = 0$ και ν-σχεδόν για κάθε $y \in Y$ ισχύει ότι $\mu(C^y) = 0$.

Καλή επιτυχία!