Θεωρία Μέτρου (511)

Εξετάσεις 22 Ιουνίου 2016

1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$.
Αν $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n, δείξτε ότι $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\cup_n A_n)$.
Αν $A_n \supseteq A_{n+1}$ για κάθε n, ισχύει ότι $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\cap_n A_n)$; (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα).

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A_n \in \mathcal{A}$. Αν $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ δείξτε ότι

(ι) $\limsup A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$,

(ιι) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, τότε $\mu(\limsup A_n) = 0$.

3. Δείξτε ότι αν ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο τότε υπάρχουν υποσύνολα Borel E, F του $\mathbb{R}$ ώστε

$$E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \lambda(F \setminus E) = 0.$$

(όπου λ το μέτρο Lebesgue).

4. Έστω $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ Αποδείξτε ότι
(α) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}$ από ανοικτά διαστήματα ώστε $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \epsilon$.
(β) Αν $\{R_1, \ldots, R_n\}$ είναι πεπερασμένη ακολουθία από ανοικτά διαστήματα ώστε $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} R_j$, τότε $\sum_{j=1}^{n} \lambda(R_j) \geq 1$.

5. Αν (f_n) είναι ακολουθία Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων με $f_n : [a, b] \to [0, 1]$ για κάθε n και το $\lim_n f_n(x) := f(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in [a, b]$ και είναι Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, αποδείξτε πλήρως ότι

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx.$$

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αποδείξτε ότι αν $f_n \to f$ κατά μέσο τότε υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) ώστε $f_{k_n} \to f$ σχεδόν παντού.

Να διατυπώνετε πλήρως τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε.
Να γραφούν πέντε θέματα.
Καλή επιτυχία!